Wechselstromkreise mit komplexem Widerstand

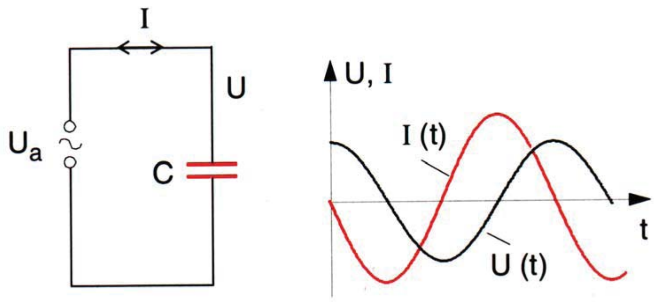
Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$ für "Widerstand" R

Gilt auch für Wechselstrom $U(t) = U_o \cdot \cos(\omega t)$

Für **Kapazität** C gilt:

$$I(t) = \omega C \cdot U_o \cdot \cos(\omega t + 90°)$$

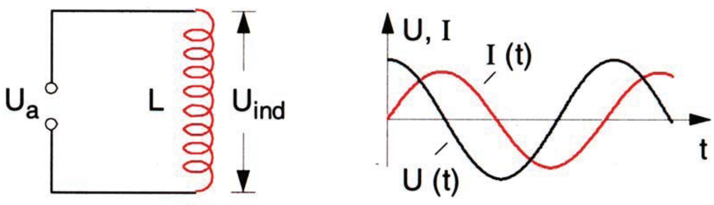
Strom eilt der Spannung um 90° voraus !



Für **Induktivität** L gilt:

$$I(t) = \frac{1}{\omega L} \cdot U_o \cdot \cos(\omega t - 90°)$$

Strom hängt der Spannung um 90° nach !



E. Riedle, LMU 22.10.15

In allen drei Fällen (R, C, L) ist der Maximalwert des Stroms dem Maximalwert der Spannung proportional und die Zeitabhängigkeit durch "cos"-Funktion gegeben!

Mit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ läßt sich eine **komplexwertige Beschreibung** herleiten:

- reale Spannung und realer Strom sind der Realteil der komplexen Spannung und des komplexen Stroms
- Verhältnis aus U und I ist konstant, der **komplexe Widerstand Z** (Zeigerdiagramm !)

Spannung, Strom; $U(t) = U_o \cdot e^{i\omega t}$ $I(t) = I_o \cdot e^{i\omega t + \varphi}$

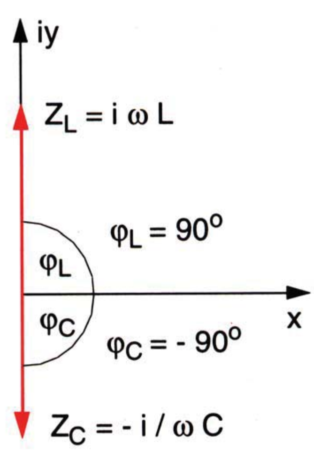
komplexer Widerstand: $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_o}{I_o} e^{i\varphi} = |Z|\, e^{i\varphi}$

Impedanz: $|Z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,Z)^2 + (\mathrm{Im}\,Z)^2}$

Phasenverschiebung: $\varphi = \tan^{-1}(\mathrm{Im}\,Z / \mathrm{Re}\,Z)$

Wirkwiderstand: Re Z Blindwiderstand: Im Z

$Z(R) = R$ $Z(C) = -i\frac{1}{\omega C}$ $Z(L) = i\omega L$



Effektivwerte und Leistung

Leistung, die von Wechselspannung in R verbraucht wird ist:

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{U(t)^2}{R} \right\rangle = \left\langle \frac{U_o^2 \cos(\omega t)^2}{R} \right\rangle = \frac{U_o^2}{R} \left\langle \cos(\omega t)^2 \right\rangle = \frac{U_o^2}{R} \cdot \frac{1}{2}$$

Gleichspannung $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_o$ ergibt gleiche Leistung !!

Definition: Effektivspannung und Effektivstrom sind die Gleichspannung bzw. der Gleichstrom, die gleiche Leistung am Widerstand liefern wie ein beliebiges periodisches Wechselsignal.

Für cos-förmige Signale gilt $\quad A_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_o$

Für die Leistung gilt:

Wirkleistung $\quad P_{wirk} = \langle P(t) \rangle = \langle U(t) \cdot I(t) \rangle = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

Blindleistung $\quad P_{blind} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$

Im "Stromzähler" wird die Wirkleistung gemessen.

E. Riedle Physik LMU

Reihenschaltung komplexer Widerstände:

Durch alle Widerstände fließt der gleiche Strom; Spannungen addieren sich.

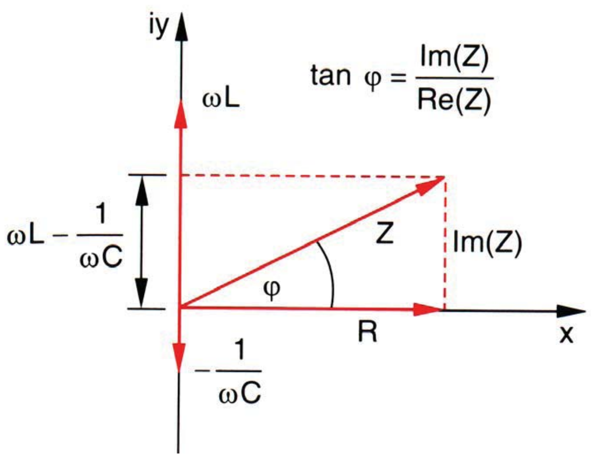
$$U(t) = Z_{tot} \cdot I(t) = U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = (Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot I(t)$$

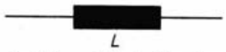
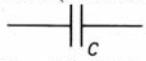
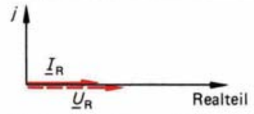
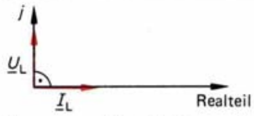
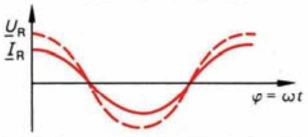
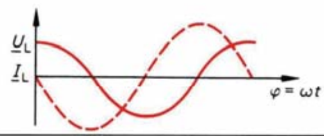
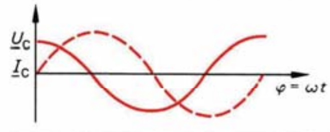
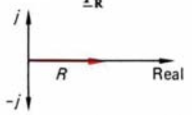
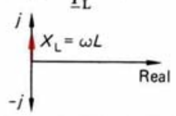
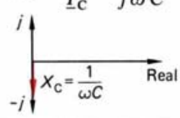
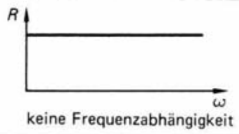
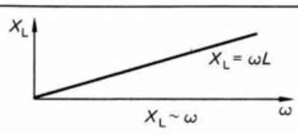
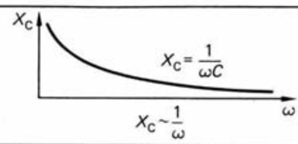
$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

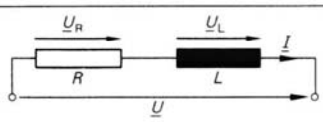
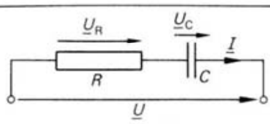
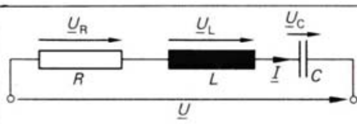
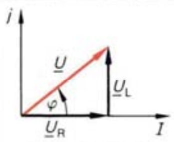
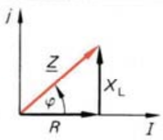
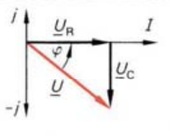
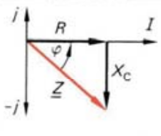
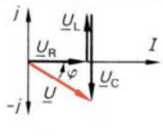
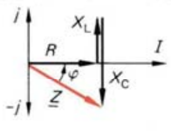
$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

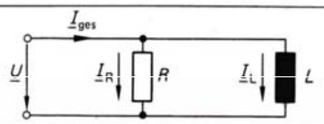
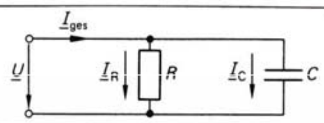
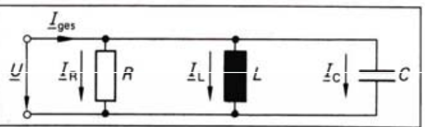
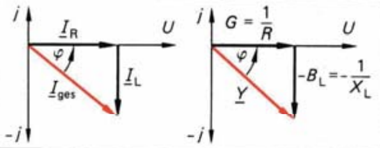
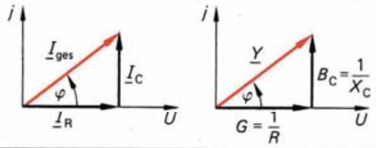
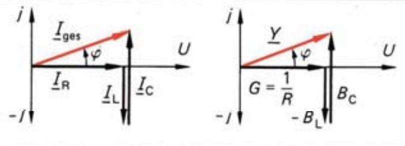
Parallelschaltung von komplexen Widerständen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \ldots.. + \frac{1}{Z_n}$$ komplexe Leitwerte

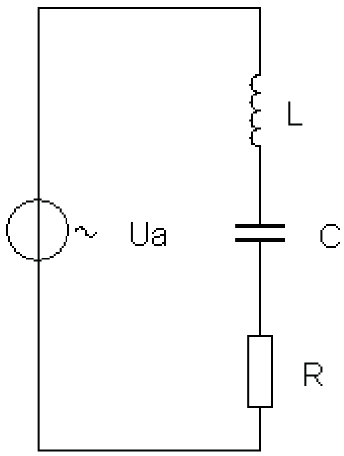


Bauelement und Symbol	Ohmscher Widerstand  (Wirkwiderstand)	Induktivität (Spule)  (induktiver Blindwiderstand)	Kapazität (Kondensator)  (kapazitiver Blindwiderstand)
Ausgangsgröße	$\underline{U}_R = U_R\, e^{j(\omega t+\varphi)}$	$\underline{I}_L = I_L\, e^{j(\omega t+\varphi)}$	$\underline{U}_C = U_C\, e^{j(\omega t+\varphi)}$
Gesetz	Ohmsches Gesetz $\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R}$ $\underline{I}_R = \frac{U_R}{R}\, e^{j(\omega t+\varphi)}$ (1-82)	Induktionsgesetz $\underline{U}_L = L\cdot\frac{d\underline{I}_L}{dt}$ $\underline{U}_L = j\omega L\, \underline{I}_L$ (1-83)	$\underline{I}_C = C\cdot\frac{d\underline{U}_C}{dt}$ $\underline{I}_C = j\omega C\, \underline{U}_C$ (1-84)
Zeigerdiagramm	 Spannung $\underline{U}_R$ und Strom $\underline{I}_R$ in gleicher Phase ($\varphi_u - \varphi_i = 0$).	 Spannung $\underline{U}_L$ eilt Strom $\underline{I}_L$ um $\pi/2$ voraus ($\varphi_u - \varphi_i = \pi/2$).	 Strom $\underline{I}_C$ eilt Spannung $\underline{U}_C$ um $\pi/2$ voraus ($\varphi_i - \varphi_u = \pi/2$).
zeitlicher Verlauf (rot ausgezogen: Strom rot gestrichelt: Spannung)			
komplexer Widerstand	$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = R$ (1-85)  (reelle Achse)	$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = j\omega L = j X_L$ (1-86)  (positive imaginäre Achse)	$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = -j X_C$ (1-87)  (negative imaginäre Achse)
Frequenzabhängigkeit			

Schaltung			
Zeigerdiagramm	 	 	 
Maschenregel	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$ $\underline{U} = I(R + jX_L)$ mit $X_L = \omega L$ $\underline{U} = I(R + j\omega L)$ (1-88)	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$ $\underline{U} = I(R - jX_C)$ mit $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $\underline{U} = I\left(R - \frac{j}{\omega C}\right)$ (1-89)	$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$ $\underline{U} = I(R + j(X_L + X_C))$ $\underline{U} = I\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)$ (1-90)
komplexer Widerstand	$\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi}$; $\quad Z = \sqrt{\mathrm{Real}(\underline{Z})^2 + I\,m(\underline{Z})^2}$; $\quad \tan\varphi = \frac{I\,m(\underline{Z})}{\mathrm{Real}(\underline{Z})}$		
Spezieller komplexer Widerstand	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX_L$ $\underline{Z} = R + j\omega L$ (1-91) $\lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ (1-92) $\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$ (1-93)	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX_C$ $\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$ (1-94) $\lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (1-95) $\tan\varphi = -\frac{1}{R\omega C}$ (1-96)	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j(X_L + X_C)$ $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ (1-97) $\lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (1-98) $\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ (1-99)
Resonanz	–	–	$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (1-100) $f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (1-101)

Schaltung			
Zeigerdiagramm			
Knotenregel	$\underline{I}_{ges}=\underline{I}_R+\underline{I}_L$ $\underline{I}_{ges}=\frac{\underline{U}}{R}+\frac{\underline{U}}{jX_L}$ $\underline{I}_{ges}=\underline{U}(G-jB_L)$ (1-102)	$\underline{I}_{ges}=\underline{I}_R+\underline{I}_C$ $\underline{I}_{ges}=\underline{U}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{-jX_C}\right)$ $\underline{I}_{ges}=\underline{U}(G+jB_C)$ (1-103)	$\underline{I}_{ges}=\underline{I}_R+\underline{I}_L+\underline{I}_C$ $\underline{I}_{ges}=\underline{U}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{jX_L}+\frac{1}{-jX_C}\right)$ $\underline{I}_{ges}=\underline{U}(G+j(B_C-B_L))$ (1-104)
komplexer Leitwert	$\underline{Y}=Ye^{j\varphi}$; $\lvert\underline{Y}\rvert=\sqrt{\mathrm{Real}(\underline{Y})^2+\mathrm{Im}(\underline{Y})^2}$; $\tan\varphi=\frac{\mathrm{Im}(\underline{Y})}{\mathrm{Real}(\underline{Y})}$		
spezieller komplexer Leitwert	$\underline{Y}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=G-jB_L$ $\underline{Y}=G-j\frac{1}{\omega L}$ (1-105) $\lvert\underline{Y}\rvert=\sqrt{G^2+\left(-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ (1-106) $\tan\varphi=\frac{-B_L}{G}=-\frac{R}{\omega L}$ (1-107)	$\underline{Y}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=G+jB_C$ $\underline{Y}=G+j\omega C$ (1-108) $\lvert\underline{Y}\rvert=\sqrt{G^2+(\omega C)^2}$ (1-109) $\tan\varphi=\frac{B_C}{G}=\omega CR$ (1-110)	$\underline{Y}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=G+j(B_C-B_L)$ $\underline{Y}=G+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$ (1-111) $\lvert\underline{Y}\rvert=\sqrt{G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ (1-112) $\tan\varphi=\frac{B_C-B_L}{G}=R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$ (1-113)
Resonanz	–	–	$\omega L=\frac{1}{\omega C}$ $\omega_{res}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (1-100) $f_{res}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (1-101)

Elektromagnetischer Schwingkreis



Es gilt (nach Kirchhoff): $$0=U=L\cdot\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}+I\cdot R$$

$$\Rightarrow\quad 0=L\cdot\frac{d^2I}{dt^2}+R\cdot\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\cdot I$$

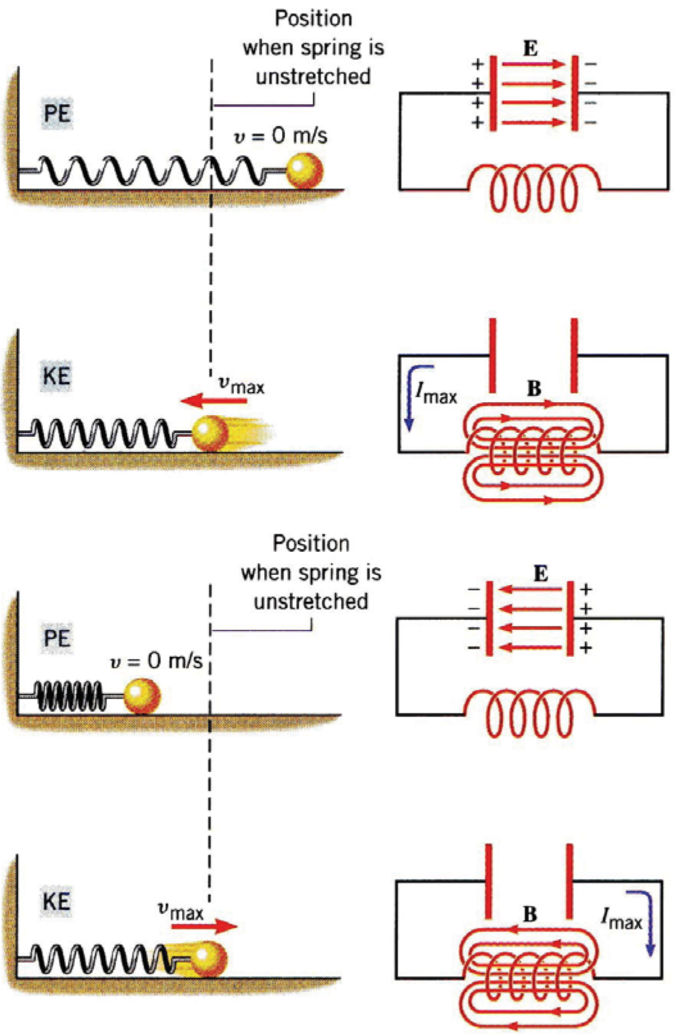
Ansatz: $$I(t)=I_o\cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow\quad 0=L\cdot\lambda^2\cdot I_o\cdot e^{\lambda t}+R\cdot\lambda\cdot I_o\cdot e^{\lambda t}+\frac{1}{C}\cdot I_o\cdot e^{\lambda t}\quad\Rightarrow\quad 0=\lambda^2+\frac{R}{L}\cdot\lambda+\frac{1}{L\cdot C}$$

Lösungen: $$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\beta$$

Allgemeine Lösung: $$I(t)=I_1\cdot e^{-(\alpha-\beta)t}+I_2\cdot e^{-(\alpha+\beta)t}$$

Die Wahl der Koeffizienten I_1 und I_2 ist durch die Bedingung beschränkt, daß der Strom reell sei muß.



Die Energie ist abwechselnd im E-Feld des Kondensators (Ladung) oder im B-Feld der Spule (Strom) enthalten.

Bei verschwindendem R bleibt sie insgesamt extrem lange erhalten.

Je nach Wert von

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$$

(+, - oder 0) ergibt sich

unterschiedliches Verhalten.

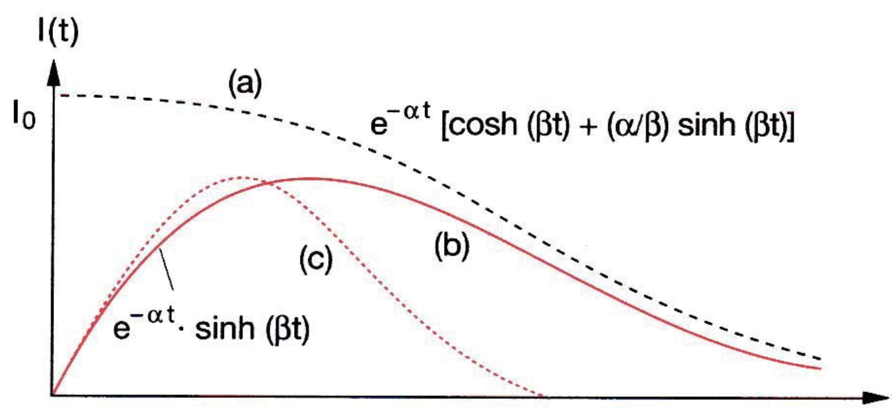
Kriechfall: $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \beta$ reell

$$I(t) = \frac{\dot{I}_0}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sinh(\beta t) = \frac{\dot{I}_0}{2\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right)$$

Aperiodischer Grenzfall: $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$

$$I(t) = \frac{\dot{I}_0}{\beta} \cdot t \cdot e^{-\alpha t}$$

Das System kehrt in der kürzest möglichen Zeit zum Gleichgewicht zurück.



Gedämpfte Schwingung: $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \Rightarrow \beta$ imaginär

sei $\beta = i \bullet \omega$ und "günstige" Phase betrachtet:

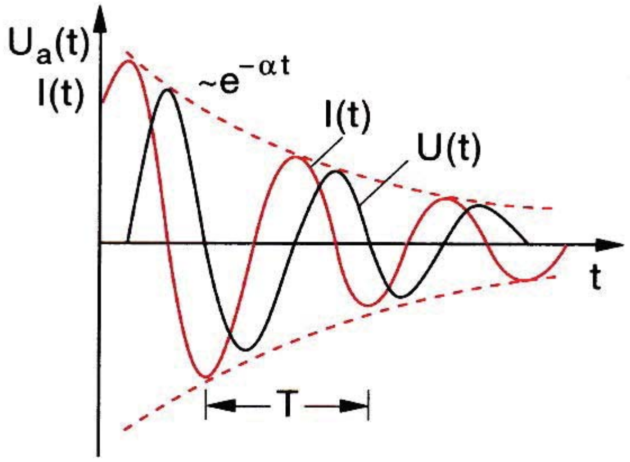
$$I(t) = I_o \bullet e^{-\alpha t} \bullet e^{-i\omega t} = I_o \bullet e^{-\frac{R}{2L}t} \bullet e^{-i \bullet \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \bullet t}$$

gedämpfteSchwingung mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

für R = 0 ungedämpfte Schwingung bei der

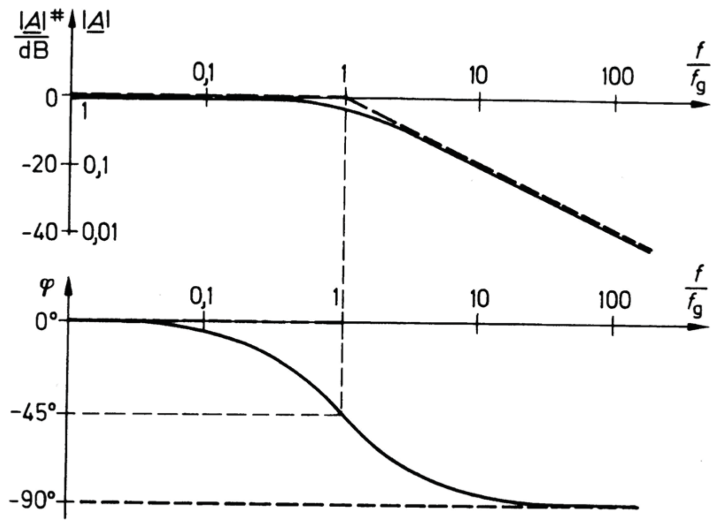
Resonanz-Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$



Erzwungene Schwingungen

Gekoppelte Schwingkreise

Abb. 26.38. Bode-Diagramm eines Tiefpasses



$$|\underline{A}|^{\#} = 20\,\mathrm{dB}\,\lg \frac{\widehat{U}_a}{\widehat{U}_e} = 20\,\mathrm{dB}\,\lg |\underline{A}|$$

Lineares Spannungsverhältnis $\lvert\underline{A}\rvert$	Logarithmisches Spannungsverhältnis $\lvert\underline{A}\rvert^*$
0,5	– 6 dB
$1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$	– 3 dB
1	0 dB
$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	3 dB
2	6 dB
10	20 dB
100	40 dB
1000	60 dB

Tab. 26.8. Umrechnungstabelle

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$