

Grundlagen der Halbleiterphysik

Notizen zur Vorlesung Elektronik

WS 2017/18

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2	5 Der pn-Übergang	31
1.1 Der Markt	2	5.1 Thermisches Gleichgewicht	32
1.2 Überblick über die Eigenschaften von Halbleitern	5	5.2 Verarmungs-Zone	34
1.3 Halbleitermaterialien	7	5.3 Kapazität der Verarmungszone	37
1.4 Halbleiterbauelemente	9	5.4 Strom-Spannungs-Kennlinie	38
2 Bandstrukturen	10	5.5 Kurze Diode	40
2.1 Qualitative Bemerkungen	10	5.6 Durchbruch	41
2.2 Modell freier Elektronen	11	6 Der Bipolar-Transistor	45
2.3 Freie Elektronen im periodischen Gitter	12	6.1 Entwicklung des Transistors	45
2.4 Bandlücke	13	6.2 Grundlegende Funktion	47
2.5 Effektive Masse	15	6.3 Schaltung mit gemeinsamer Basis	48
2.6 Zustandsdichte	16	6.4 Idealisierte Grundschaltungen und Operationsbereiche	50
3 Ladungsträgerstatistik	17	6.5 Modell der dünnen Basis	51
3.1 Fermi-Statistik	17	6.6 Ströme	52
3.2 Intrinsische Halbleiter	18	6.7 Summe der Ströme	54
3.3 Dotierte Halbleiter	20	6.8 Emitterschaltung	56
3.4 Majoritäts- und Minoritäts-Ladungsträger	23	7 Unipolare Strukturen	58
4 Ladungsträgertransport	25	7.1 Metall-Halbleiter-Kontakte	59
4.1 Bewegung des Bloch-Elektrons	25	7.2 Der JFET	66
4.2 Drift der Ladungsträger	26	7.3 MESFETs	70
		7.4 Heteroübergang-MESFET	71
		4.3 Diffusion von Ladungsträgern	30

7.5	MOSFET	72
7.6	Vergleich FET zu Bipolar-Transistor	75
7.7	Integration	76
8	Literatur	82

1 Einführung

Überblick über:

1. Halbleiterindustrie und Halbleitermarkt
2. wichtigste Eigenschaften von Halbleitern
3. Halbleitermaterialien
4. einige Bauelemente

Lehrbücher:

- S.M. Sze, Semiconductor Devices – Physics and Technology
- F. Thuselet, Physik der Halbleiterbauelemente

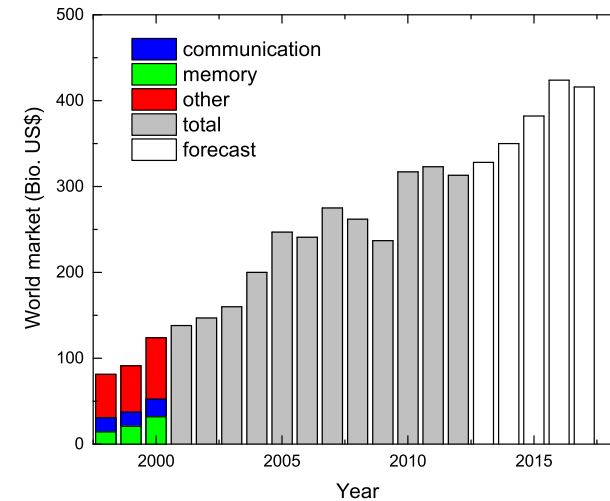


Abbildung 1.1: Entwicklung der Umsätze in der Halbleiterindustrie. Verschiedene Quellen.

1.1 Der Markt

Halbleiterbauelemente in allen Bereichen des Lebens:

1. Computer
2. Telekommunikation
3. Steuerungsanlagen vom Garagentor und Dimmer bis zu Industrieanlagen
4. Messgeräte: Wissenschaft, Ingenieurwesen, Medizintechnik
5. Automobile: ABS bis GPS
6. ...

Umsatz der Halbleiterindustrie: s. Abb. 1.1

Beschäftigte in der Halbleiterindustrie

z.B.: Infineon: 36.000 in 2016 weltweit, 6.4 Mrd. EUR Umsatz

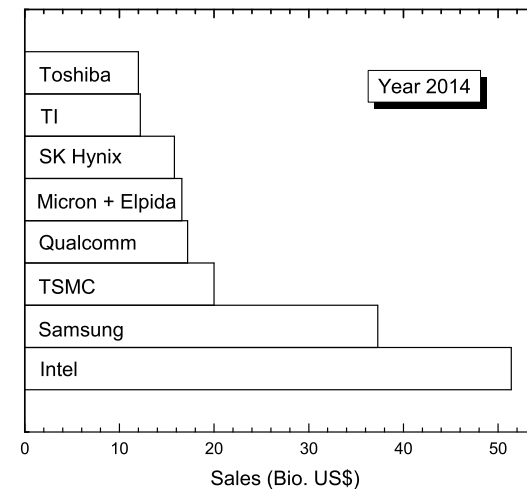


Abbildung 1.2: Führende Unternehmen. Quelle: IC Insights.

Historisch:

1. Prognose des Feldeffekttransistors: Julius Lilienfeld (1925)
2. Patent zum FET: Oskar Heil (1935)
3. Realisierung eines Bipolar-Transistors
 - W. Shockley, W. H. Brattain und J. Bardeen (1949) [1]
 - Punkt-Kontakt-Transistor
 - Nobelpreis für Physik (1956)
4. Khang und Atalla, Bell (1960) :
 - erster Si/SiO₂ MOS-Feldeffekttransistor
5. Integrierter Schaltkreis:
 - Entwicklung durch J. Kilby (1958), (Arbeitsgebiet: u.a. Hörgeräte)
 - auf einem Substrat durch R. Noyce (1959)

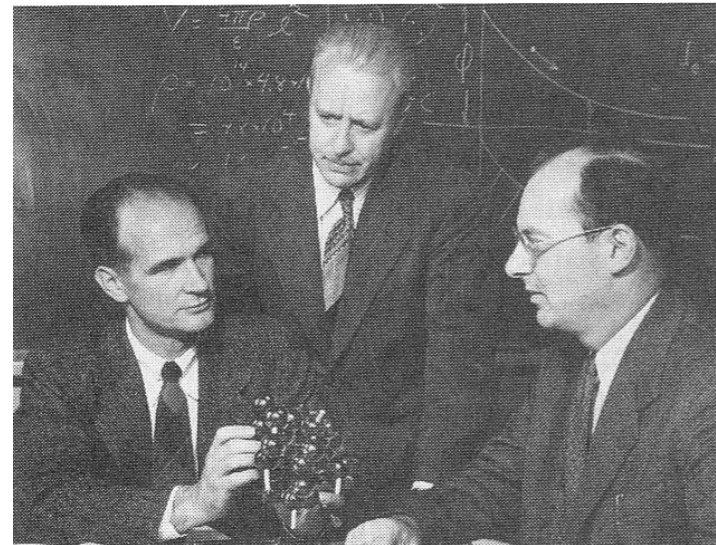
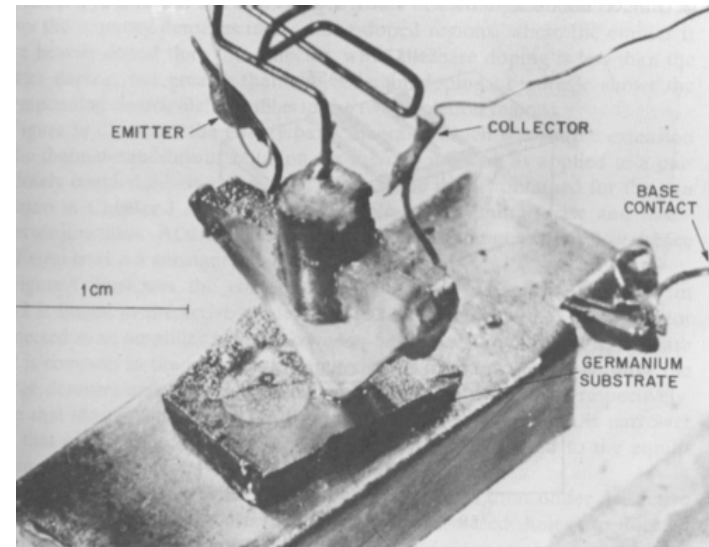


Abbildung 1.3: Der erste Transistor (nach Ref. [2], S. 109). Das obere Foto zeigt den Ge-Transistor von Bardeen und Brattain [1]. Das untere Foto zeigt William P. Shockley, Walter H. Brattain und John Bardeen. Sie erhielten 1956 den Nobelpreis für die Verstärkung von Strömen in Halbleitern (nach Ref. [3], S. 542).

Die Zukunft: Moore'sche Gesetze: zeitlich exponentieller Anstieg

- der Dichte der Halbleiter-Bauelemente
- der Geschwindigkeit
- ...

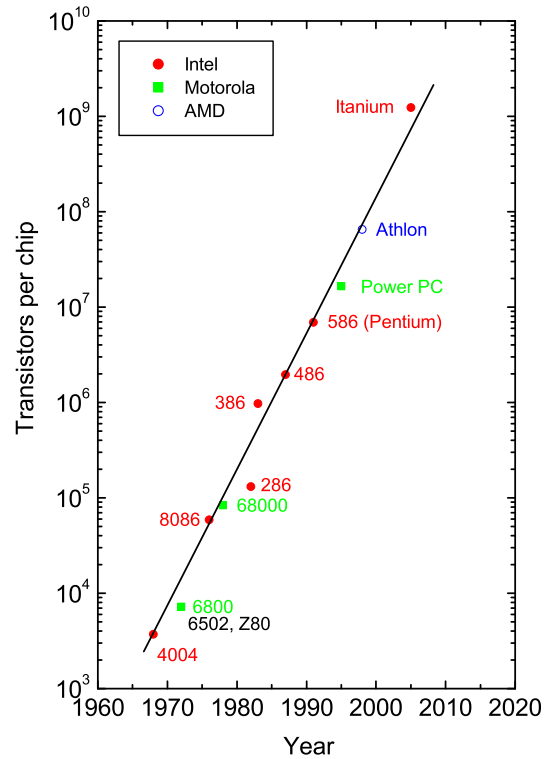


Abbildung 1.4: Moore'sches Gesetz zur Transistordichte.

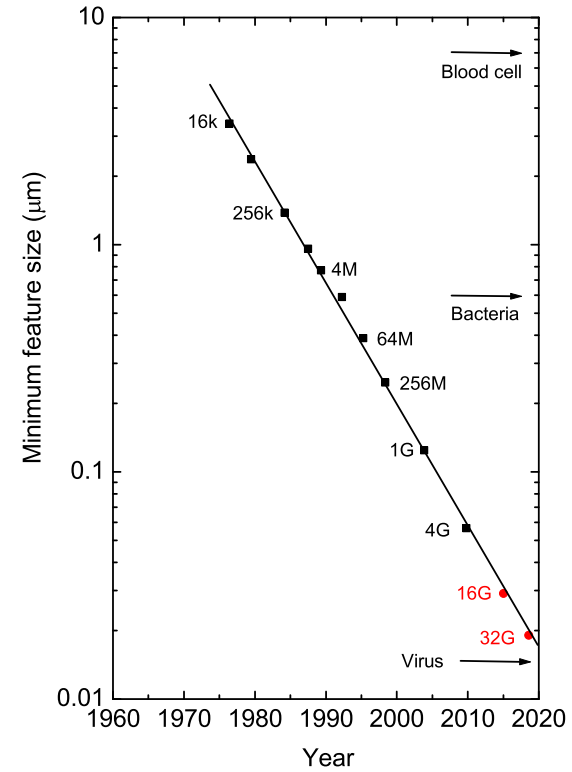


Abbildung 1.5: Moore'sches Gesetz zum kleinsten produzierbaren Element.

Trend:

- Nano-Bereich
- relevant: Quanteneffekte

1.2 Überblick über die Eigenschaften von Halbleitern

Eine Unterscheidung der Halbleiter von anderen Formen der kondensierten Materie ist nicht leicht:

1. üblicherweise kristalline Festkörper
 - anorganisch: Si, Ge, GaAs, ...
 - organisch: Pentazen, Rubren, ...
2. aber z.B. auch amorphes Si
3. glasförmige Halbleiter (Polymere)

Praktische Unterscheidungsmerkmale von Halbleitern:

1. Die elektrische Leitfähigkeit liegt zwischen denen von Metallen und typischen Isolatoren.
2. Die elektrische Leitfähigkeit steigt mit der Temperatur.
3. Die elektrische Leitfähigkeit steigt mit der Beleuchtungsstärke.

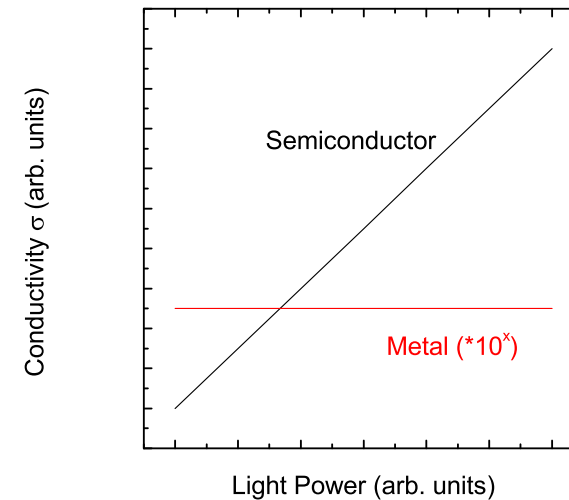
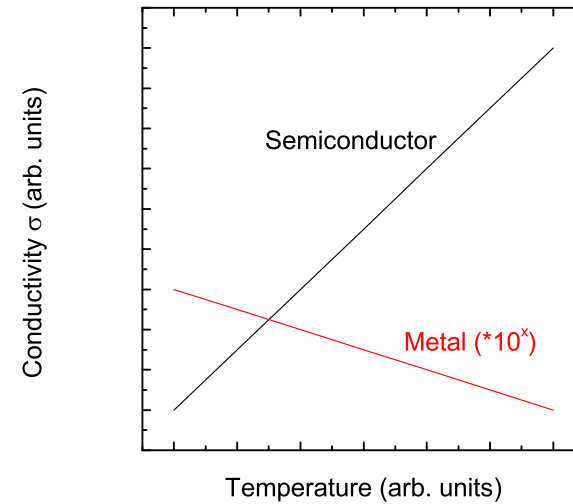


Abbildung 1.6: Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit in Abhängigkeit von Temperatur und Beleuchtungsleistung.

Leitfähigkeit der Halbleiter:

- weiter Bereich: $10^{-9} \text{ S/cm} < \sigma < 10^3 \text{ S/cm}$
- kontrollierbar durch Dotierung
- elektrisch kontrollierbar

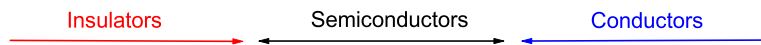
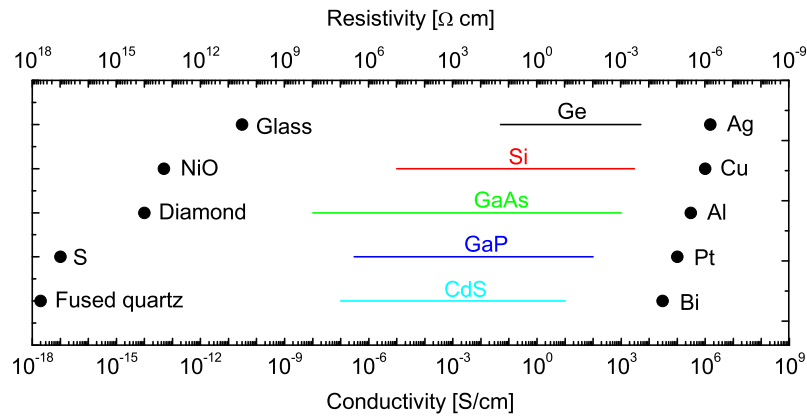


Abbildung 1.7: Typischer Bereich der Leitfähigkeiten von Isolatoren, Halbleitern und Metallen. Nach Ref. [2] S. 1.

Hintergrund: Energiebänder

- Bandabstand
- Leitungsband (meist vollkommen unbesetzt)
- Valenzband (meist vollkommen besetzt)

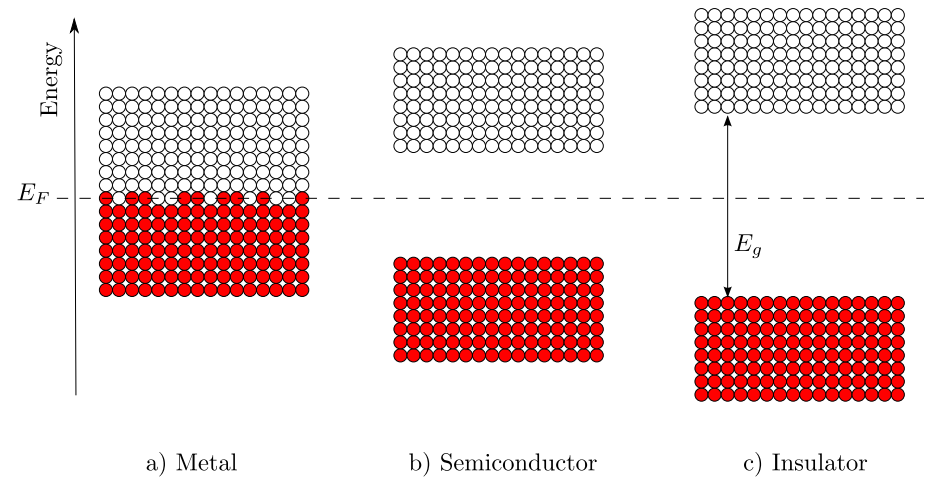


Abbildung 1.8: Bandabstände und Lage der Fermi-Energien von Metallen, Halbleitern und Isolatoren.

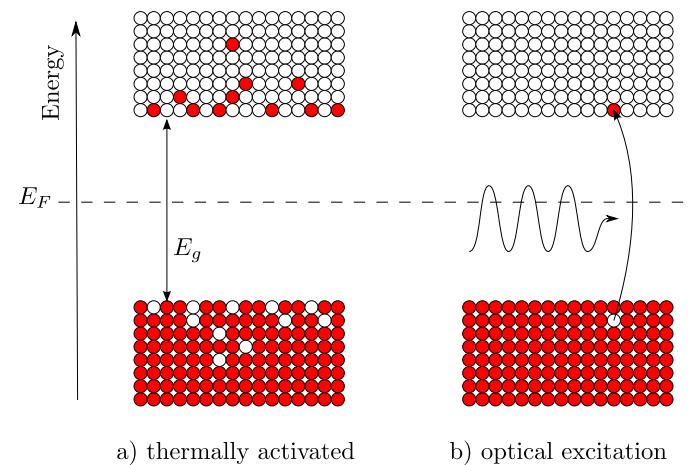


Abbildung 1.9: Thermisch aktivierte Ladungsträgerdichte und optische Anregung von Elektronen.

1.3 Halbleiternaterialien

1.3.1 Element-Halbleiter:

Germanium (Ge):

1. der Halbleiter der ersten Stunde
2. kann hochrein, sogar isotonenrein hergestellt werden
3. aber: kein stabiles Oxid

Silizium (Si):

1. heute wichtigster Halbleiter
2. kann hochrein hergestellt werden
3. Durchmesser der Substrate bis zu 30 cm
4. Versetzungsdichten kleiner als 1000 cm^{-3}
5. Verunreinigungen kleiner als 10^{12} cm^{-3}
6. preiswerte Herstellung der Substrate (Erdkruste: 25% Silikate)
7. bildet stabiles Oxid (Grund für die Durchsetzung gegenüber Ge)

Eigenschaften des Kristallgitters von Si und Ge:

1. Beide kristallisieren im Diamant-Kristallgitter (α -Sn).
2. Die Atome haben die Koordinationszahl 4.
3. Kovalente Bindungen zwischen den Atomen

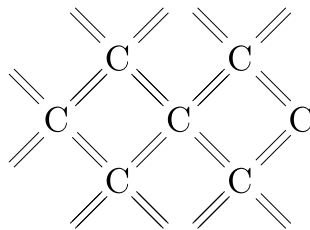


Abbildung 1.10: Schematische zweidimensionale Darstellung eines perfekten Diamantgitters. Nach Ref. [4] S. 4.

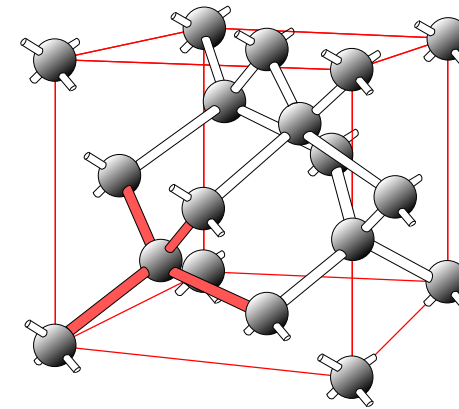


Abbildung 1.11: Diamantgitter. Ein Tetraeder der Bindungen ist hervorgehoben.

1.3.2 Verbindungs-Halbleiter:

z.B. GaAs, SiC, GaN, InGaAs.

Bindungsart: Kovalent mit leicht ionischem Charakter. Alle Bindungen sind gesättigt, aber polar. Bindungsmöglichkeiten ergeben sich nach dem Periodensystem (s. Tabelle 1.1).

Binäre Verbindungshalbleiter: z.B. GaAs, InP etc. (s. Tab. 1.2)

Periode	Gruppe II	Gruppe III	Gruppe IV	Gruppe V	Gruppe VI
2		B	C	N	
3	Mg	Al	Si	P	S
4	Zn	Ga	Ge	As	Se
5	Cd	In	Sn	Sb	Te
6	Hg		Pb		

Tabelle 1.1: Teil des Periodensystems.

Element Halbleiter	IV-IV Halbleiter	III-V Halbleiter	II-VI Halbleiter	IV-VI Halbleiter
Si	SiC	GaAs	CdS	PbS
Ge		InP	CdSe	PbTe
		InSb	ZnO	
		GaN	ZnS	
		AlN	ZnTe	

Tabelle 1.2: Einige wichtige binäre Verbindungshalbleiter.

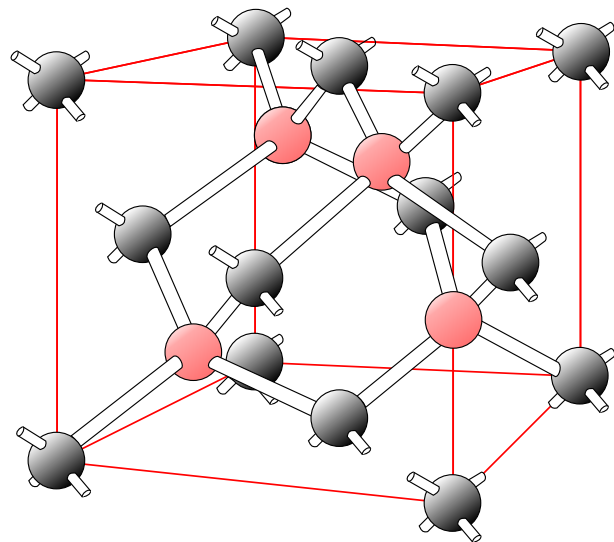


Abbildung 1.12: Zinkblende-Gitter bestehend aus zwei verschiedenen Elementen Nach [2], S. 5.

Ternäre Verbindungshalbleiter: z.B. $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Die Stöchiometrie lässt sich oft beliebig einstellen.

Dotierungen:

- Kontrolle der Leitfähigkeit
- räumlicher Verlauf der Energiebänder:
 - bipolar-Bauelemente: Dioden, Transistoren, etc.:

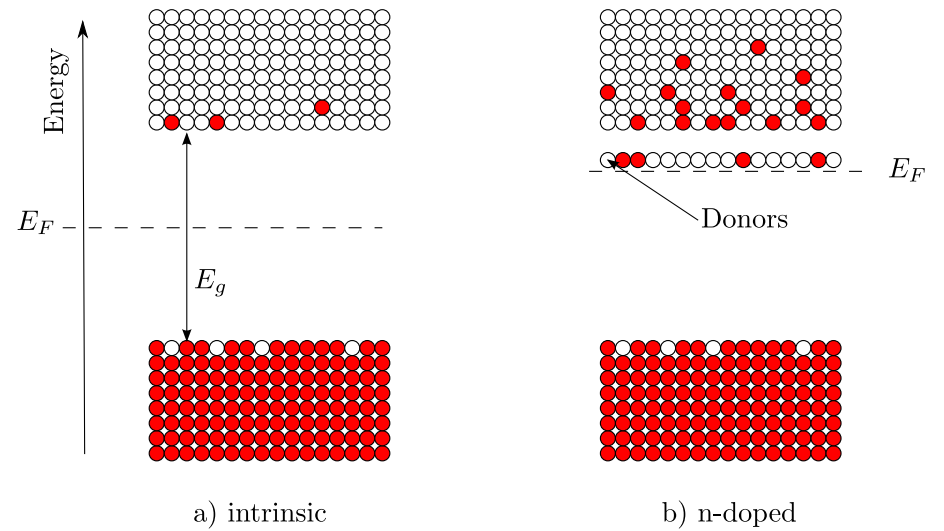


Abbildung 1.13: Erhöhung der Elektronenkonzentration durch Einbau von Donatoratomen.

1.4 Halbleiterbauelemente

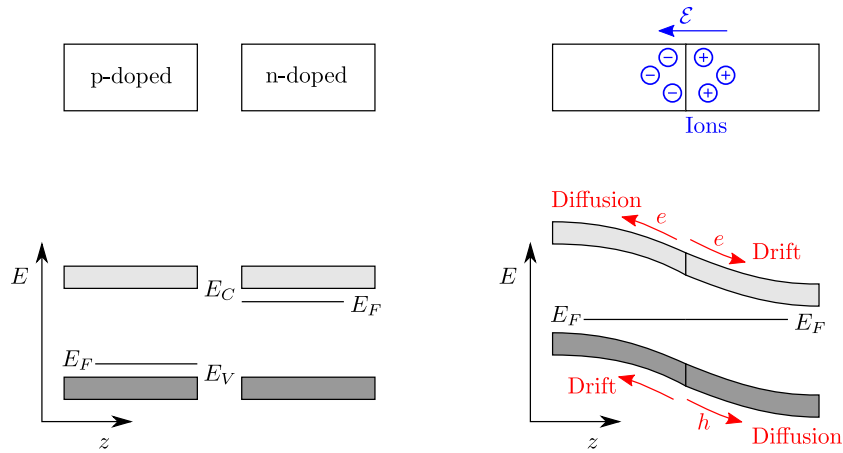


Abbildung 1.14: Schema zu einer pn-Diode nebst Drift- und Diffusionsströmen.

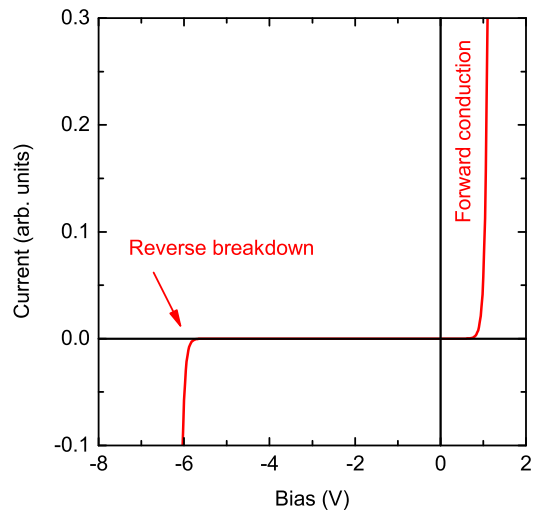


Abbildung 1.15: Strom-Spannungscharakteristik einer pn-Diode

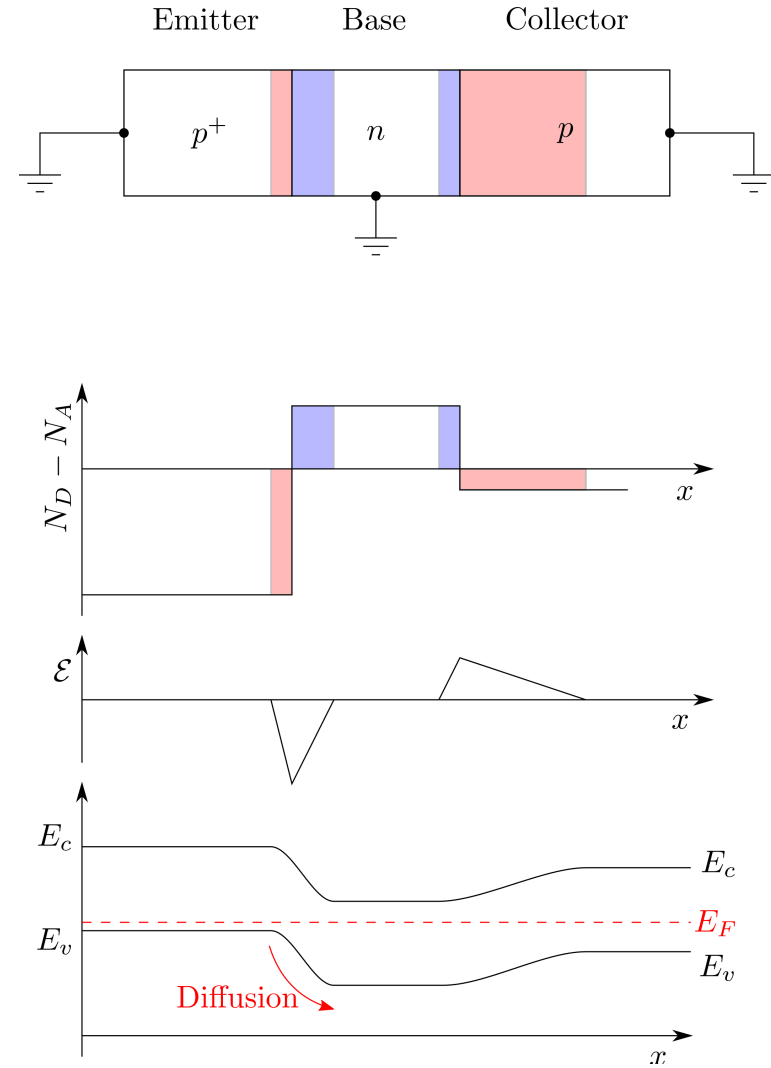


Abbildung 1.16: Schema zu einem pnp-Bipolartransistor.

2 Bandstrukturen

Ziele:

1. Qualitatives Verständnis der Bandstrukturen
2. Eigenschaften der Bänder

Stichworte: Freies-Elektronen-Modell, Dispersion, effektive Masse, Bandabstand

Lehrbuch: z.B. P. Yu und M. Cardona [5] oder K. Seeger [4]

Fragestellung: Wie kommt es zu Energiebändern und welche Eigenschaften haben sie?

2.1 Qualitative Bemerkungen

Beschreibung der Elektronen mittels Schrödinger-Gleichung:

$$H\Psi = E\Psi \quad (1)$$

Herausforderung:

- $\Psi = \psi(r_1, s_1, r_2, s_2 \dots r_n, s_n)$ mit $n \approx 10^{23}$.
- nahezu ebenso viele Atompotentiale
- Hamiltonian kann sehr komplex sein.

Praktische Herangehensweise:

- Ein-Elektronen-Näherung
- Ausnutzung der periodischen Eigenschaften

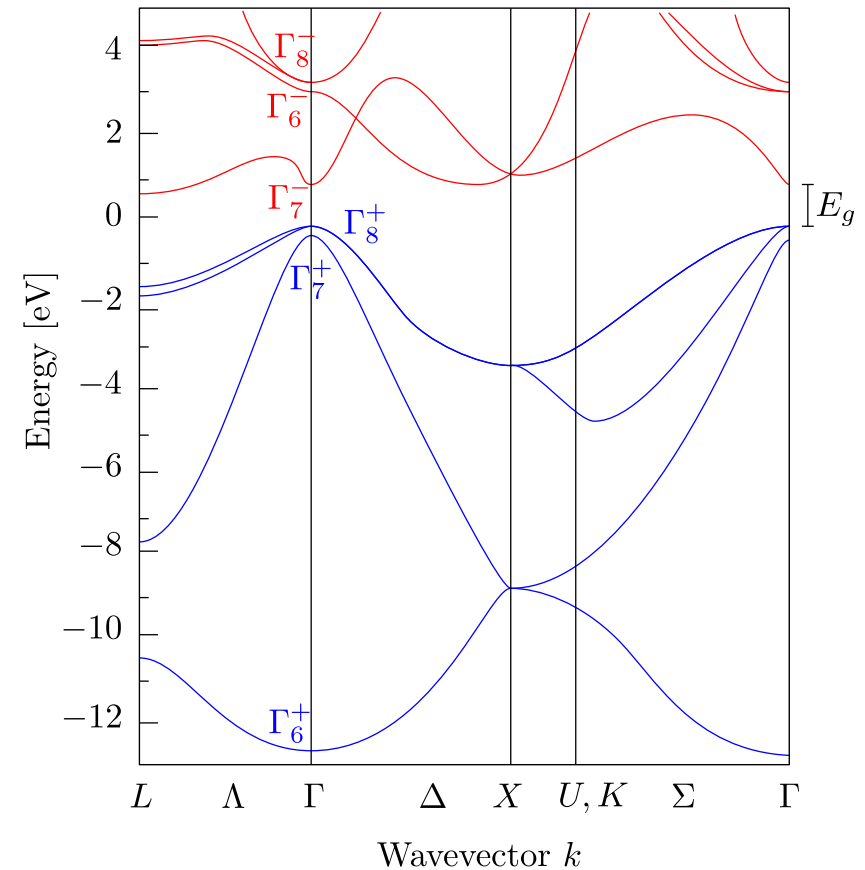


Abbildung 2.1: Bandstruktur von Germanium nach Ref. [5], S. 60.

2.2 Modell freier Elektronen

Start: Gänzlich freie Elektronen, d.h. ebene Wellen

$$\Psi \sim e^{ikx} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (2)$$

Annahme: Elektronen nahezu frei, d.h. schwaches periodisches Potential, welches nur für die Symmetriebedingungen benötigt wird.

Hamiltonian in Ein-Elektronen-Näherung:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \quad (3)$$

Periodisches Potential:

$$V(r) = V(r + R) \quad (\text{hier eindimensional}) \quad (4)$$

Konsequenz:

- Ψ muss mit R periodisch sein
- Ψ enthält einen periodischen Modulationsanteil $u_{n,k}$ mit

$$u_{n,k}(r) = u_{n,k}(r + R) \quad \text{später: Definition von } n,k \quad (5)$$

Bloch-Funktion:

$$\Psi_{n,k}(r) = e^{ikr} u_{n,k}(r) \quad (6)$$

- erfüllt Welleneigenschaften
- erfüllt Periodizität
- s. Abb. 2.2

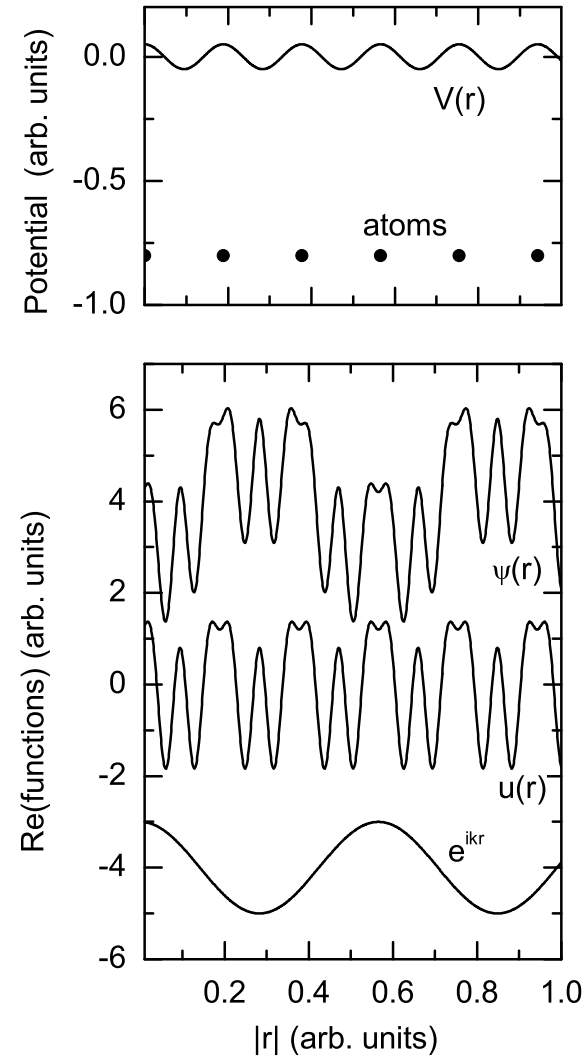


Abbildung 2.2: Schwaches periodisches Potential und Wellenfunktion.

2.3 Freie Elektronen im periodischen Gitter

Eigenschaft:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}} = 1 \quad \forall \quad \vec{k} = \vec{G} \quad \text{mit Gitterabstand } a \quad (7)$$

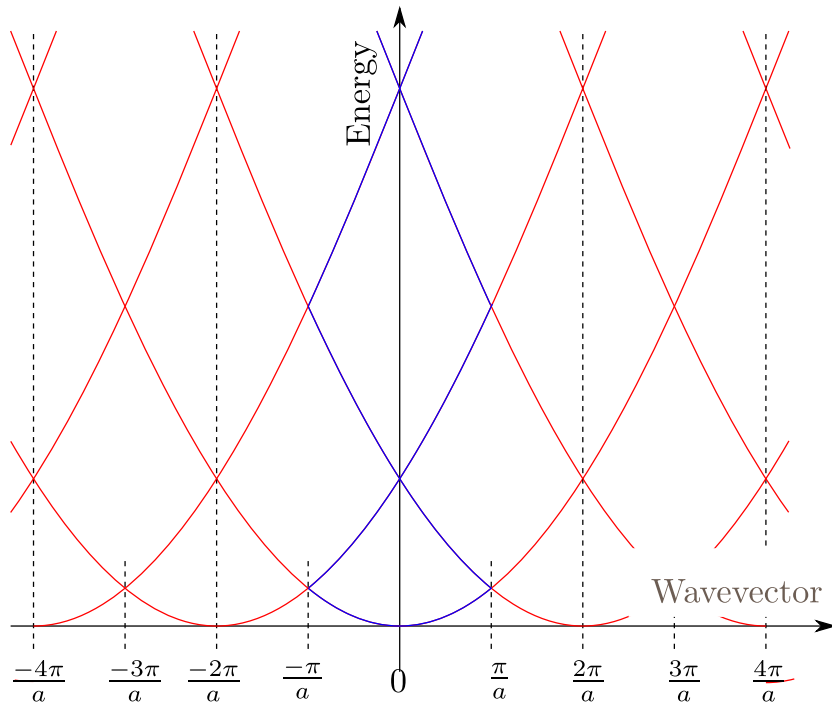


Abbildung 2.3: Schema zur Dispersion im periodischen Gitter und zum reduzierten Zonenschema.

Konsequenzen:

1. Periodizität in k :

$$\psi_{n,\vec{k}} = \psi_{n,\vec{k}+\vec{G}} \quad (8)$$

2. Zahlreiche Dispersionsrelationen (jetzt 1D):

$$E(\Psi(k)) = E(\Psi(k + G)) \quad (9)$$

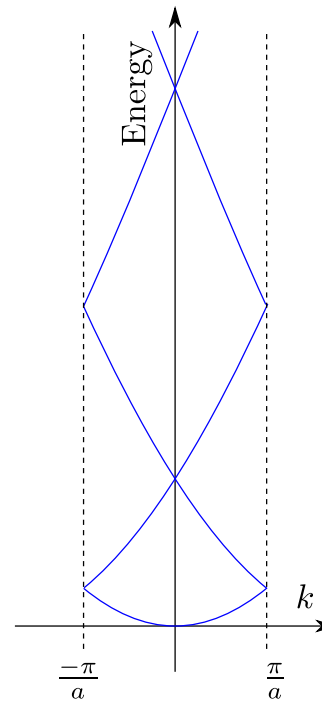
$$\text{mit } G = \frac{2\pi}{a}j \quad \forall \quad j \in \mathbb{Z}$$

Anmerkung 1: Der Wellenvektor k kann immer auf die erste Brillouin-Zone begrenzt werden (reduziertes Zonenschema).

Anmerkung 2: An einigen Punkten ist die Dispersionsrelation entartet: Zwei Wellenfunktionen liefern den gleichen Energieeigenwert.

$$E(\Psi(k)) = E(\Psi(k + G)) \quad (10)$$

$$\text{mit } G = \frac{2\pi}{a}j \quad \forall \quad j \in \mathbb{Z}$$



2.4 Bandlücke

Voraussetzungen:

- periodisches Gitter
- schwaches Potential ($V(r) \rightarrow 0$)

Herleitung:

- über Störungstheorie
- s. Ashcroft, S. 152
- liefert für den Bandabstand

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2|V_G| = 2 \left| V\left(\pm\frac{\pi}{a}\right) \right| \quad (11)$$

Einige Energielücken: Nach Ref. [6]

Kristall	Lücke	E_g [eV]	
		0 K	300 K
Si	indirekt	1.17	1.11
Ge	indirekt	0.744	0.66
GaAs	direkt	1.52	1.43
InP	direkt	1.42	1.27
InAs	direkt	0.43	0.36

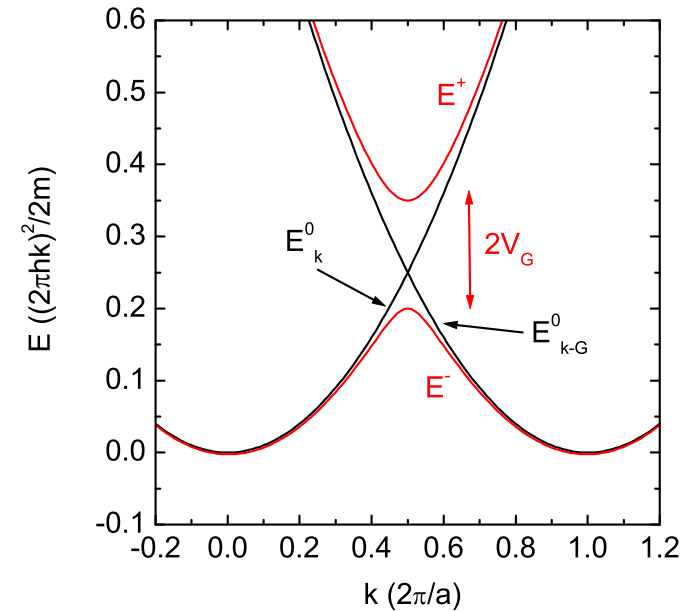


Abbildung 2.4: Part of the band structure according to the nearly-free electron model.

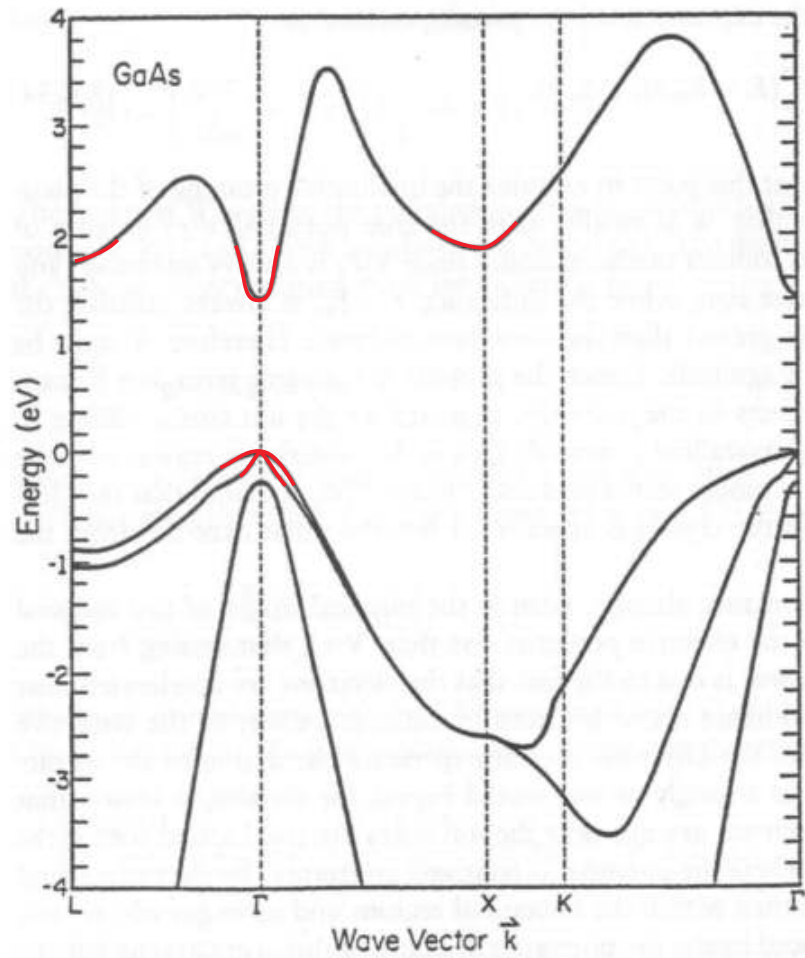


Abbildung 2.5: Bandstruktur von GaAs nach einer Pseudopotentialrechnung [5]. In Rot sind die wichtigsten Abschnitte der Bandstruktur dargestellt.

2.5 Effektive Masse

Anmerkung 3: Der Wellenvektor k unterscheidet sich vom Impuls des Elektrons p :

Es war:

$$\Psi_{n,k}(r) = e^{ikr} u_{n,k}(r) \quad (12)$$

$$p\Psi_{nk} = \frac{\hbar}{i}\nabla\Psi_{nk} = \frac{\hbar}{i}\nabla(e^{ikr}u_{nk}(r)) = \hbar k\Psi_{nk} + e^{ikr}\frac{\hbar}{i}\nabla u_{nk}(r) \quad (13)$$

Der letzte Term führt zum Unterschied:

$$p \neq \hbar k \quad (14)$$

Zusammenhang mit der Dispersion: Effektive Masse beschreibt den Energiegewinn bei Änderung des Wellenvektors

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 \quad (15)$$

wobei m^* die effektive Masse ist.

Definition der effektiven Masse:

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2E}{dk^2} \right)^{-1} \quad (16)$$

Krümmung: Enge Krümmung bedeutet kleine Masse.

Typische Werte: mit $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg

- GaAs: $m_e^* = 0.067 \cdot m_e$
- Si: $m_e^* = 0.19 \cdot m_e$

Effektive Masse der Löcher: (nach [4], S. 15)

	Bez.	Einheit	GaAs	InP	In _{0.53} Ga _{0.47} As
Bandlücke (bei 300 K)	E_g	eV	1.424	1.340	0.750
Bandabstand $\Gamma_6 - L_6$	$\Delta E_{\Gamma L}$	eV	0.29	0.61	0.55
Bandabstand $\Gamma_6 - X_6$	$\Delta E_{\Gamma X}$	eV	0.52	0.70	0.67
Bandabstand $\Gamma_8 - \Gamma_7$	ΔE_{so}	eV	0.340	0.11	0.29
Masse des Elektrons bei Γ_6	m_e^*	m_e	0.067	0.073	0.041
Masse des Elektrons bei L_6	m_e^*	m_e	0.22	0.26	0.291
Masse des Elektrons bei X_6	m_e^*	m_e	0.58	0.325	0.679
Masse des schweren Lochs bei Γ_8	m_{hh}^*	m_e	0.45	0.45	0.50
Masse des leichten Lochs bei Γ_8	m_{lh}^*	m_e	0.094	0.12	0.51
Masse des Split-Off-Lochs bei Γ_7	m_{so}^*	m_e	0.133	0.121	–

Tabelle 2.1: Parameter der Bandstrukturen für GaAs, InP und InGaAs.

1. Konvention: m_h^* ist positiv und gleichzeitig $q_h > 0$
2. Alternativ: Bewegung vieler Elektronen negativer Masse

Konzept der effektiven Masse:

- nicht mehr notwendig: Kenntnis der Atompotentiale, Lösung der SG
- allein m^* beschreibt Energiegewinn durch Änderung von k
- anwendbar: Newton'schen Gesetze
- aber Quasipartikel: Bloch-Elektron

2.6 Zustandsdichte

Frage: Wie viele Zustände für Elektronen gibt es innerhalb eines Energieintervalls?

Bekannt: Bloch'sches Theorem:

$$\Psi(\vec{r} + m\vec{a}) = \Psi(\vec{r}) \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

Zusammenhang im 1D:

- Länge des Kristalls: L mit $ma = L$
- Born-von Karman'sche Bedingung (periodische Grenzbedingung)

$$e^{ikL} = e^{ikma} = 1 \quad (18)$$

Konsequenzen:

- Erlaubte k -Werte haben einen Abstand von $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$.
- Im reziproken Raum hat ein Zustand das Volumen:

$$\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \quad (19)$$

Durch Integration erhält man die Anzahl der Zustände:

$$N = \int \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-3} \cdot dk_x dk_y dk_z = \int \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-3} 4\pi k^2 dk \quad (20)$$

Mache hieraus eine Dichte:

$$n = \frac{N}{L^3} = \int \frac{4}{8\pi^3} \pi k^2 dk \quad \text{mit } n = \int N_c(E) dE \quad (21)$$

ergibt sich die sogenannte Zustandsdichte des Leitungsbands (Index c):

$$N(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_h^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_c} \quad (22)$$

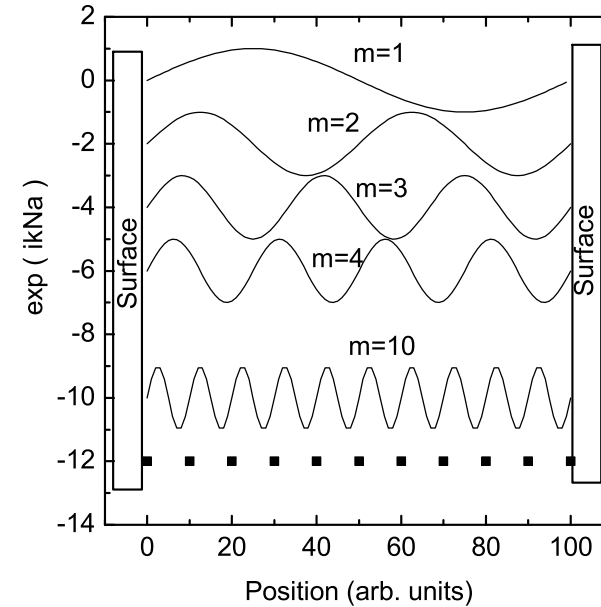


Abbildung 2.6: Stehende Wellen in einem Festkörper begrenzter Ausdehnung.

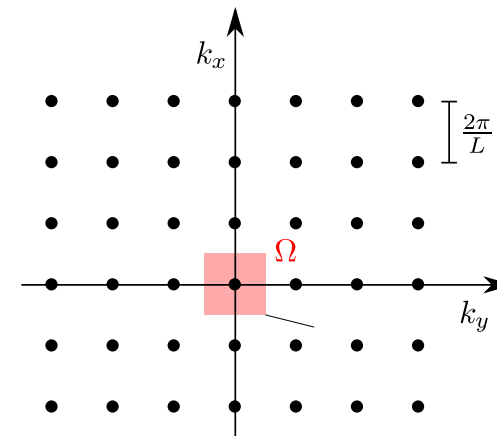


Abbildung 2.7: Gitterpunkte im reziproken Raum und Zelle.

3 Ladungsträgerstatistik

Ziele:

1. Beschreibung der Ladungsträgerdichten
2. Verständnis der Funktion von Donatoren und Akzeptoren

Stichworte: Fermi-Energie, Fermi-Dirac-Verteilung, Maxwell-Boltzmann-Verteilung, Donatoren, Akzeptoren, effektive Zustandsdichte, Majoritäts/Minoritäts-Ladungsträger

Lehrbuch: z.B. S.M. Sze [2] oder K. Seeger [4]

Fragestellung: Wie verteilen sich Ladungsträger über die Bandstruktur?

3.1 Fermi-Statistik

Charakteristika:

1. Elektronen sind ununterscheidbar.
2. Jeder Zustand kann gleichzeitig nur durch zwei Elektronen besetzt werden (Pauli-Prinzip).

Fermi-Dirac-Verteilung:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} \tag{23}$$

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.38066 \times 10^{-23}$ J/K

Fermi-Energie: E_F , bisher unbestimmt (irgendwo in der Bandlücke)

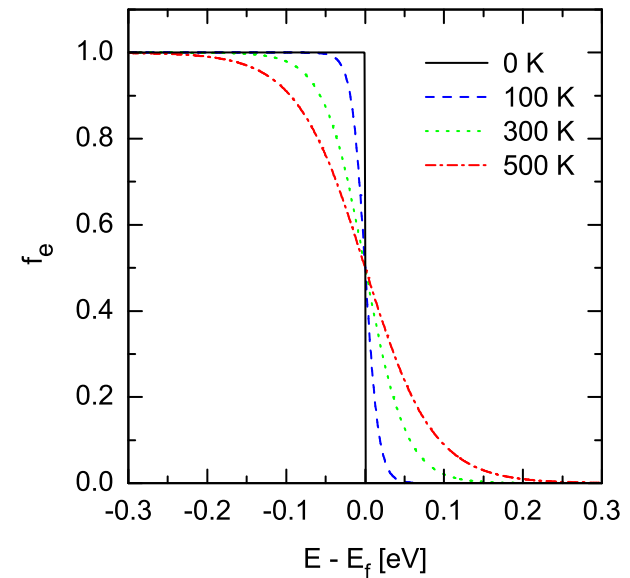


Abbildung 3.1: Fermi-Dirac-Verteilung.

3.2 Intrinsische Halbleiter

Intrinsisch: Ausschließlich Zustände des reinen Halbleiterbandes:

- keine Dotieratome
- keine Störstellen
- keine optische Anregungen, etc..

Frage: Wahrscheinlichkeit eines besetzten Zustands?

Beispiel: Intrinsisches GaAs bei Raumtemperatur

$$k_B T = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J} \approx 0.026 \text{ eV}$$

Annahme: Femi-Energie in der Mitte der Bandlücke von GaAs ($E_g = 1.4 \text{ eV}$):

Für die niedrigsten Zustände an der Leitungsbandkante:

$$E_C - E_F = 0.7 \text{ eV}$$

$$(E_C - E_F)/k_B T = 0.7 \text{ eV}/0.026 \text{ eV} \approx 27$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E_C - E_F)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{27} + 1} \approx \frac{1}{e^{27}} = 1.9 \times 10^{-12} \quad (24)$$

Ergebnisse:

- Wahrscheinlichkeit ca. 10^{-12}
- $e^{27} + 1 \approx e^{27} \Rightarrow$ Näherung?

3.2.1 Effektive Zustandsdichte

Umformulierung: Wieviel Elektronen sind im gesamten Leitungsband?

Ausgangspunkt: Zustandsdichte

$$N_c(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_c} \quad (25)$$

$$N_v(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_h^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_v - E} \quad (26)$$

Praktisch: Verschiebung der Energieachse. Das Leitungsbandminimum sei bei $E = 0$.

$$N_c(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty N(E) \cdot f(E) dE \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_c} \cdot \frac{dE}{e^{(E - E_F)/k_B T} + 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Schwer zu berechnen, daher Vereinfachung:

- kaum Besetzungswahrscheinlichkeit
 - nicht-entartetes System
 - Fermi-Energie tief im Bandgap
- Näherung: FDV \rightarrow MBV
- Ergebnis: effektive Zustandsdichte

$$\bar{N}_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (29)$$

- einfach handzuhaben
- Konstante für jeden HL (bei Raumtemperatur)

Bedeutung:

- Summe aller verfügbaren Zustände im Band
- Vorsicht: nur bei nicht-entarteten Besetzungen
- hängt von T ab. Aber meist nur $T \approx 300$ K interessant.
- Ladungsträgerdichte über einfache Rechnung:

$$n = \bar{N}_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \quad p = \bar{N}_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \quad (30)$$

Beispiel: Effektive Zustandsdichte, GaAs, 300 K:

$$\begin{aligned} \bar{N}_c &= 2 \left(\frac{m_e^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \\ &= 2 \left(\frac{0.067 \cdot 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{2\pi (1.05 \times 10^{-34} \text{ Js})^2} \right)^{3/2} \\ &= 2 (3.6 \times 10^{15})^{3/2} \text{ m}^{-3} \\ &= 4.3 \times 10^{23} \text{ m}^{-3} \\ &= 4.3 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Intrinsische Ladungsträgerdichte

- n_i und p_i
- mit $n_i = p_i$
- exponentielle Abhängigkeit von E_g
- s. Abb. 3.2

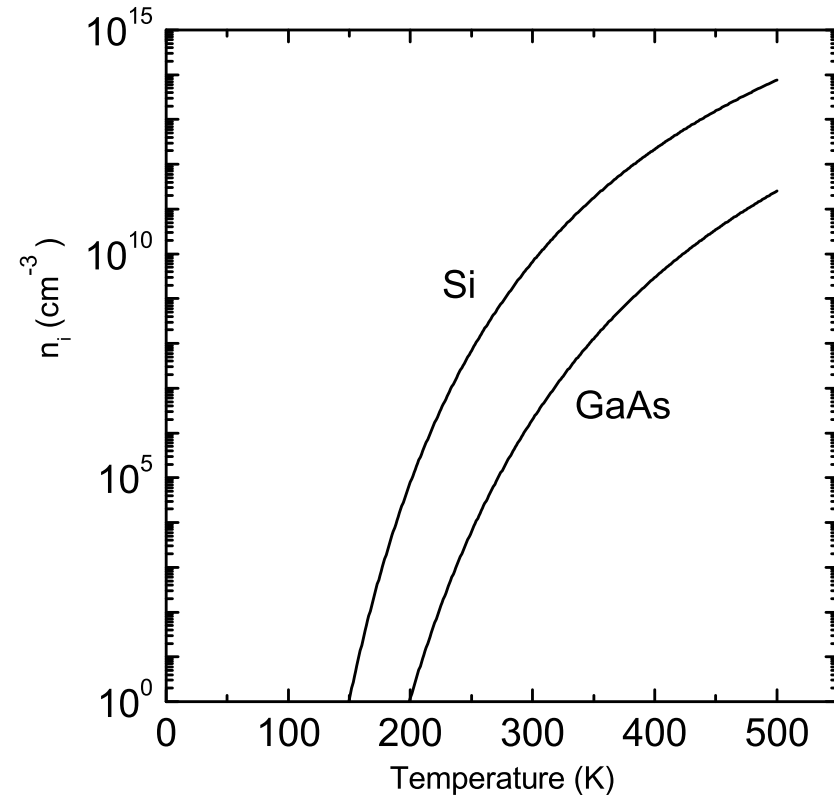


Abbildung 3.2: Intrinsische Ladungsträgerdichte n_i für Si und GaAs in Abhängigkeit von der Temperatur.

3.3 Dotierte Halbleiter

Ziel: deutlich mehr Ladungsträger als intrinsische Dichte n_i

Dotierung:

1. meist Substitution eines Gitteratoms durch ein Fremdatom
2. meist geringe Konzentrationen $< 10^{20} \text{ cm}^{-3}$
 - N_D Dichte von n-dotierenden Atomen (Donatoren)
 - N_A Dichte von p-dotierenden Atomen (Akzeptoren)

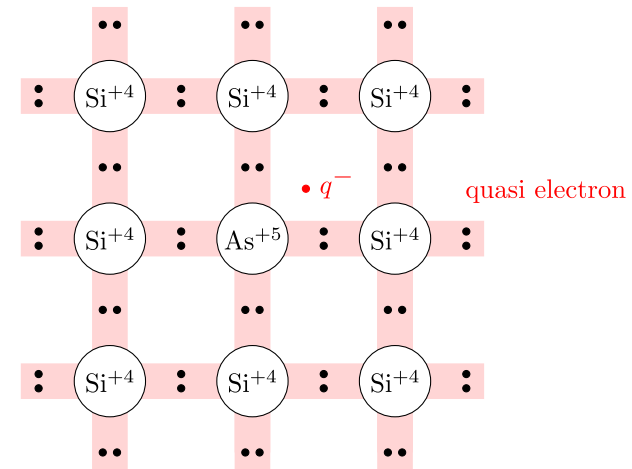
Beispiel Arsen (As) in Si:

1. As bildet kovalente Bindungen mit umgebenden Si Atomen
2. fünftes Valenzelektron frei: 'donated'
3. Si ist n-dotiert
4. Kristall bleibt neutral: $\text{As} \rightarrow \text{As}^+ + \text{e}^-$

Beispiel Bor (B) in Si:

1. B bildet kovalente Bindungen mit umgebenden Si Atomen
2. fehlendes Elektron: Loch
3. Si ist p-dotiert
4. Kristall bleibt neutral: $\text{B} \rightarrow \text{B}^- + \text{p}^+$

a) n-doped silicon



b) p-doped silicon

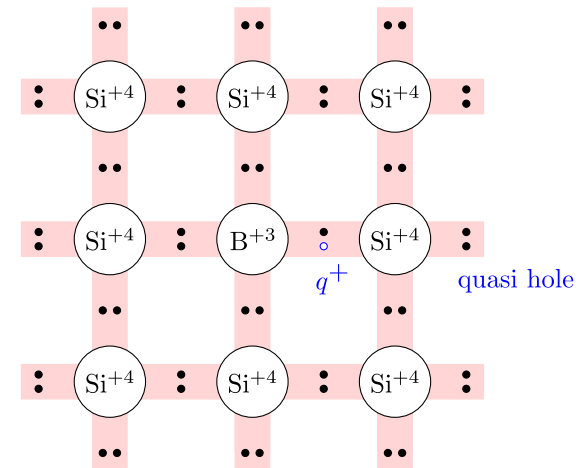


Abbildung 3.3: Schema zu den Bindungen in Si. a) für n-Dotierung mit As. b) p-Dotierung mit B. Nach Ref. [2], S. 21.

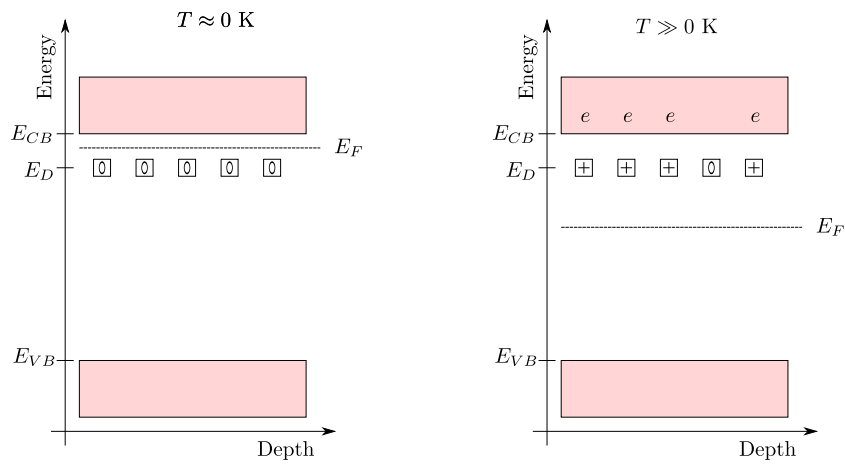


Abbildung 3.4: Schema zu Energiebändern n-dotierter Halbleiter. Links: Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt. Rechts: hohe Temperatur.

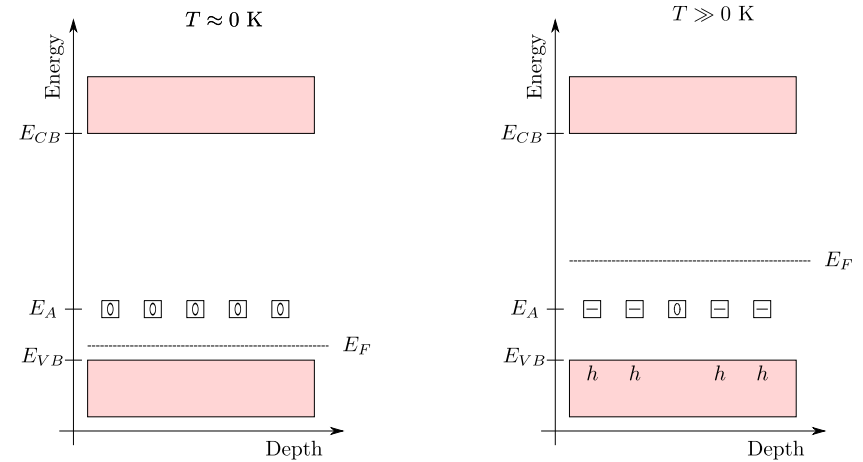


Abbildung 3.5: Schema zu Energiebändern p-dotierter Halbleiter. Links: Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt. Rechts: hohe Temperatur.

Massenwirkungsgesetz:

- gilt unter Gleichgewichtsbedingungen (keine Stromflüsse)
- Dichte der Elektronen und Löcher: n, p
- intrinsische Dichte: n_i

$$n_i^2 = np \quad (31)$$

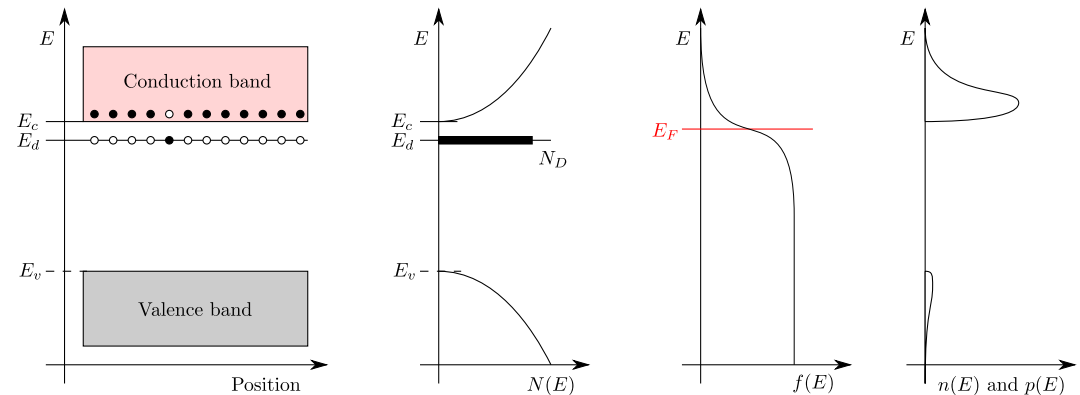


Abbildung 3.6: n-dotierter Halbleiter. a) Bandschema, b) Zustandsdichte, c) Fermi-Verteilung, d) Ladungsträger-Dichte. Nach Ref. [2], S. 23.

Flache Störstellen:

- vorläufige Annahme: Dotieratome wenige meV von den Bandkanten entfernt
 - Donatoren: $E_c - E_D < k_B T$
 - Akzeptoren: $E_A - E_v < k_B T$
- bei Raumtemperatur (26 meV) vollständig ionisiert (fully ionized)

n-Dichte bei vollständiger Ionisierung:

$$n \approx N_D \quad (32)$$

Mit der effektiven Zustandsdichte \bar{N}_c

$$n = \bar{N}_c \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \approx N_D \quad (33)$$

ergibt sich die Fermi-Energie:

$$E_c - E_F = k_B T \cdot \ln\left(\frac{\bar{N}_c}{N_D}\right) \quad (34)$$

p-Dichte bei vollständiger Ionisierung:

$$p \approx N_A \quad (35)$$

Mit der effektiven Zustandsdichte \bar{N}_v

$$p = \bar{N}_v \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \approx N_A \quad (36)$$

$$\Rightarrow E_F - E_v = k_B T \cdot \ln\left(\frac{\bar{N}_v}{N_A}\right) \quad (37)$$

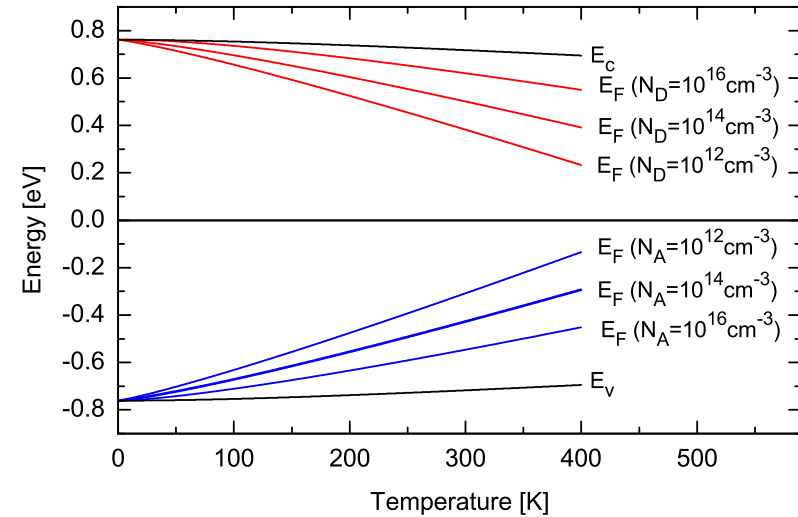


Abbildung 3.7: Lage der Fermi-Energie in GaAs in Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte. Berücksichtigt wurden die vollständige Ionisierung und die Temperaturabhängigkeit der Bandkante. Hintergrund: $E_c - E_F = k_B T \ln(\bar{N}_c/N_D)$

3.4 Majoritäts- und Minoritäts-Ladungsträger

Generalisierung: gleichzeitige n- und p-Dotierung

Majoritäts-Ladungsträger: Majority carriers

1. n_n Elektronen in einem n-dotierten Halbleiter
2. p_p Löcher in einem p-dotierten Halbleiter

Minoritäts-Ladungsträger: Minority carriers

1. n_p Elektronen in einem p-dotierten Halbleiter
2. p_n Löcher in einem n-dotierten Halbleiter

Frage: Wieviel Ladungsträger liegen in den entsprechenden Bändern vor?

Ansatz: Ladungsneutralität & Massenwirkungsgesetz

- ionisierte Akzeptoren: negativ
- ionisierte Donatoren: positiv

$$n + N_A = p + N_D \quad \text{falls vollständig ionisiert} \quad (38)$$

Das Massenwirkungsgesetz gilt stets im Gleichgewicht:

$$n_i^2 = n \cdot p \quad (39)$$

Für einen n-Halbleiter:

$$n_n = \frac{1}{2} \left[N_D - N_A + \sqrt{(N_D - N_A)^2 + 4n_i^2} \right] \quad (40)$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} \ll n_n$$

Für einen p-Halbleiter:

$$p_p = \frac{1}{2} \left[N_A - N_D + \sqrt{(N_A - N_D)^2 + 4n_i^2} \right] \quad (41)$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} \ll p_p$$

Vereinfachung in dieser Lehrveranstaltung:

$$p_n \ll n_n \quad \text{und} \quad n_p \ll p_p \quad (42)$$

Beispiel: dotiertes Silizium bei Raumtemperatur

n-Dotierung: $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$

intrinsische Dichte von Silizium bei 300 K: $n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$

Majoritätsladungsträger:

- Elektronen

$$n_n \approx N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad (43)$$

Minoritätsladungsträger:

- Löcher

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} \approx \frac{n_i^2}{N_D} = 2000 \text{ cm}^{-3} \quad (44)$$

3.4.1 Temperaturabhängigkeit

1. Bei niedrigen Temperaturen werden die Dotierungen nicht ionisiert (freeze-out).
2. Bei hohen Temperaturen nimmt die intrinsische Ladungsträgerdichte exponentiell zu.

Man unterscheidet:

1. ausgefrorenen Bereich
2. extrinsischen Bereich
3. intrinsischen Bereich

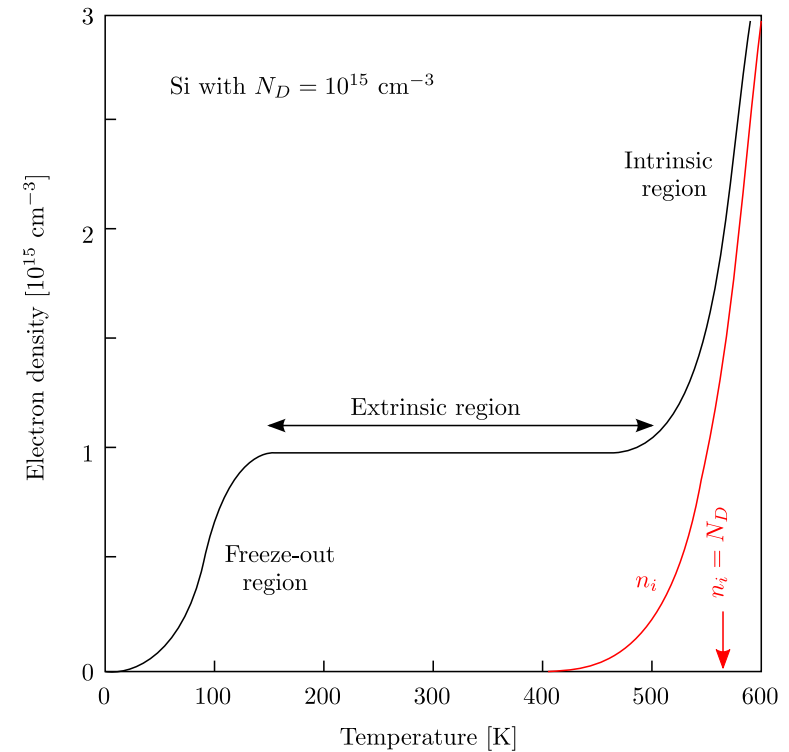


Abbildung 3.8: Dichte der Elektronen in Abhängigkeit von der Temperatur für Silizium mit einer Dichte von Donatoren von 10^{15} cm^{-3} . Nach Ref. [2], S. 27.

4 Ladungsträgertransport

Ziele:

1. Beschreibung des Transports im elektrischen Feld
2. Beschreibung der Diffusion

Stichworte: Beschleunigungstheorem, Mobilität, Diffusionskonstante,

Lehrbuch: z.B. S.M. Sze [2] oder P. Yu und M. Cardona [5],
(für Bloch Oszillationen: Ashcroft & Mermin [7])

Fragestellung: Wie funktioniert der Ladungsträger-Transport?

4.1 Bewegung des Bloch-Elektrons

4.1.1 Gruppengeschwindigkeit:

Beschreibt: Bewegung des Teilchens

Herleitung: Störungstheorie

Ansatz: Entwicklung der Dispersion

$$E_n(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k}) + \Delta\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k}) + \dots \quad (45)$$

gibt die Gruppengeschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_{gr} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k}) \quad (46)$$

Diskussion:

- Transport einer Gruppe erfordert Wellenpaket um \mathbf{k} herum
- Bloch-Funktionen sind Eigenzustände des Hamiltonians mit folgenden Konsequenzen:
 - Bloch-Zustände werden durch das Potential nicht gestreut
 - eine konstante Gruppengeschwindigkeit liegt vor (s. Gl. 46)

4.1.2 Beschleunigungs-Theorem im reziproken Raum

Beschleunigung

- Kraft greift an Elektron an
- z.B. elektrisches Feld \mathcal{E}
- geleistete Arbeit:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{gr}}_A \cdot dt = \frac{dE(\mathbf{k})}{dt} dt \quad (47)$$

mit:

$$\frac{dE}{dt} = \nabla_{\mathbf{k}} E \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \underbrace{\hbar \mathbf{v}_{gr} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt}}_A \quad (48)$$

Aus Vergleich von Gl. (47) und Gl. (48) folgt das Beschleunigungs-Theorem:

$$\mathbf{F} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (49)$$

Diskussion: Die angreifende Kraft ist proportional zu

- der Änderung des Kristallimpulses \mathbf{k}
- aber nicht zur Änderung des Impulses \mathbf{p}

4.2 Drift der Ladungsträger

Drift: Gleichgewicht zwischen Beschleunigung und Streuung

Thermische Geschwindigkeit: Elektron oder Loch etc.

$$\frac{1}{2}m_e^* \cdot v_{th}^2 = \frac{3}{2}k_B T \quad (50)$$

Zeitskala der Streuprozesse: $\tau_m \approx 100 \text{ fs} = 100 * 10^{-15} \text{ s}$

Freie Weglänge: $\Delta_{th} = v_{th} \cdot \tau_m$

Impuls-Relaxationszeit: τ_m

Beispiel: Thermische Geschwindigkeit

Elektron in GaAs, $m_e^* = 0.067 m_e$, $\tau_m = 100 \text{ fs}$

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3}{m_e^*} k_B T} = 45.000 \text{ m/s} = 45 \text{ km/s}$$

$$\Delta_{th} = v_{th} \cdot \tau_m = 45.000 \text{ m/s} * 100 \text{ fs} = 4.5 * 10^{-9} \text{ m}$$

4.2.1 Klassischer Ansatz zur Leitfähigkeit

Hintergrund: Drude-Modell, Paul Drude (1900), Ref. [8]

Impuls: Beschleunigung des Elektrons über eine Zeit τ_m .¹

$$p = -e\mathcal{E}\tau_m = mv \quad (51)$$

oder:

$$v = -\frac{e\tau_m}{m^*} \cdot \mathcal{E} \quad (52)$$

¹Der Ansatz ist gültig in der Nähe der Bandextrema. Hier ist in guter Näherung $p = \hbar k$.

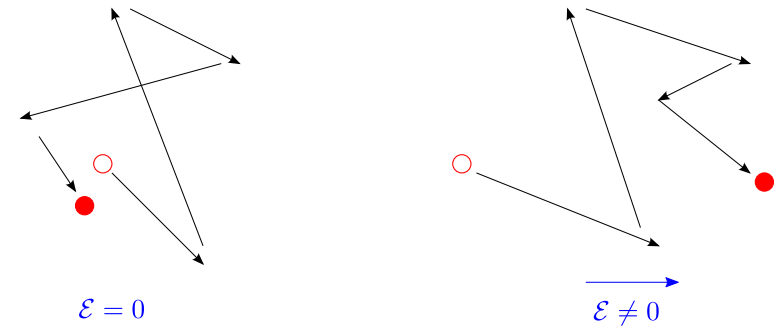


Abbildung 4.1: Bewegung eines Ladungsträgers im Raum. a) ohne elektrisches Feld \mathcal{E} , b) mit elektrischem Feld.

Die vollständige klassische Bwgl. ist:

$$m^* \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{m^*}{\tau_m} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -e\mathcal{E} \quad (53)$$

was zum gleichen Resultat führt, wenn der Term der Beschleunigung Null gesetzt wird.

Drift-Geschwindigkeit: v_n oder v_p

Durchschnittliche Geschwindigkeit im Feld.

Mobilität: μ_n oder μ_p mit der Einheit $[\mu] = \text{cm}^2/\text{Vs}$

$$|v_n| = \mu_n \cdot \mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \mu_n = \frac{e\tau_{m,n}}{m_n^*} \quad (54)$$

$$v_p = \mu_p \cdot \mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \mu_p = \frac{e\tau_{m,p}}{m_p^*} \quad (55)$$

Typischer Wert: $\mu_n(\text{n-Si, bei } 300 \text{ K}) \approx 1200 \text{ cm}^2/\text{Vs}$

Anwendungsbereich: moderate Felder bis etwa $\mathcal{E} \approx 10 \text{ kV/cm}$

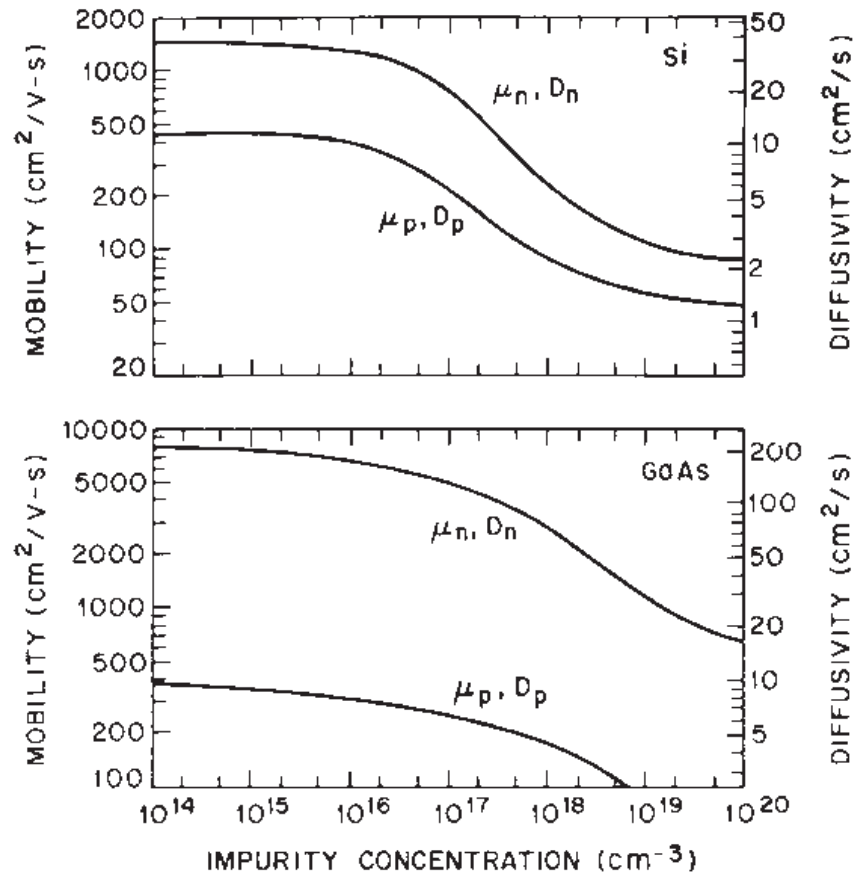


Abbildung 4.2: Mobilitäten und Diffusionskonstanten in Si und GaAs bei 300 K in Abhängigkeit von der Dotierungsdichte. Nach Ref. [2], S. 34.

4.2.2 Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand

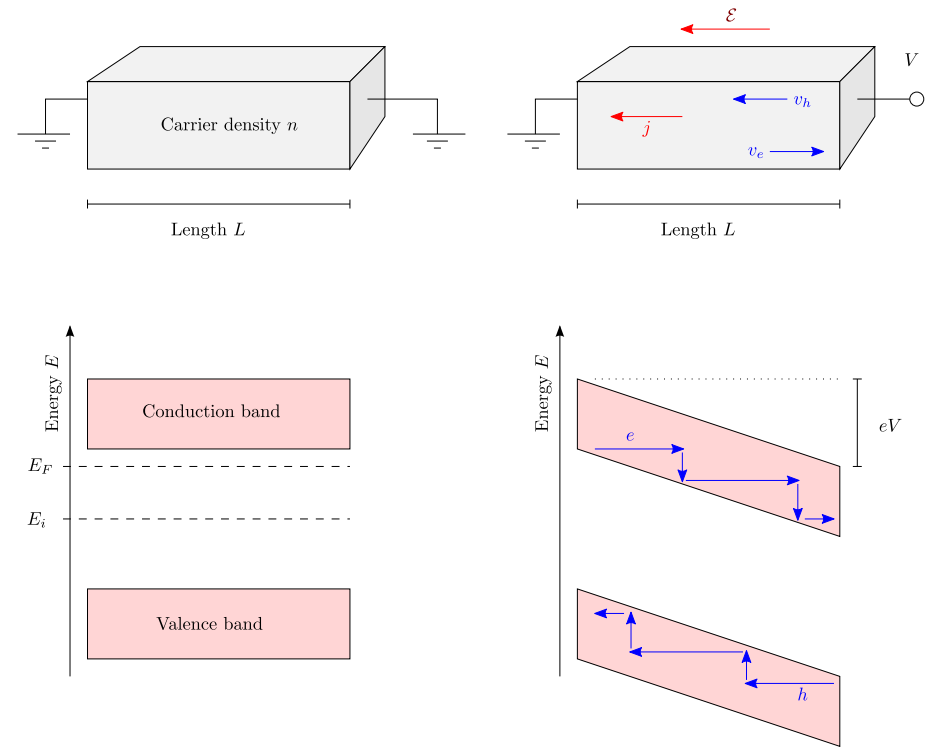


Abbildung 4.3: Prozess der Stromleitung in einem n-dotierten Halbleiter. Links: im thermischen Gleichgewicht. Rechts: bei Anlegung einer elektrischen Spannung. Nach Ref. [2], S. 35.

Spannungsabfall über der Probe: ² V

Ladungsträger durchläuft Potential: $\psi = eV$

Elektrisches Feld: $\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dx}$

²Wie in angelsächsischer Literatur V für voltage.

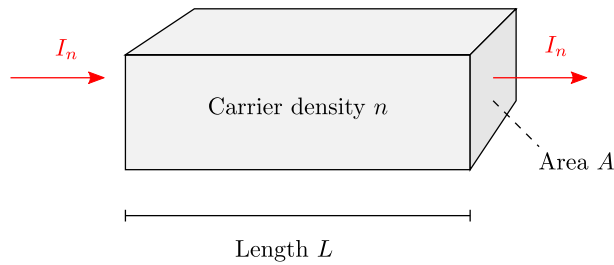


Abbildung 4.4: Elektrische Leitung durch eine homogene Halbleiterprobe.
Nach Ref. [2], S. 36.

Stromdichte der Elektronen: (s. Abb. 4.4)

Die Anzahl der Elektronen pro Zeiteinheit durch die Fläche A ist (n ist die Elektronendichte):

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = n \cdot A \cdot v_n \quad (56)$$

Dann ist der Strom:

$$I_n = -e \frac{\Delta N}{\Delta t} = -en \cdot A \cdot v_n \quad (57)$$

und die Stromdichte:³

$$j_n = \frac{I}{A} = -e \cdot n_n \cdot v_n = en\mu_n \mathcal{E} \quad \text{mit } [j] = \text{A/m}^2 \quad (58)$$

Analog für Löcher:

$$j_p = ep\mu_p \mathcal{E} \quad (59)$$

Gesamtstrom:

$$j = j_n + j_p = (en\mu_n + ep\mu_p) \mathcal{E} \quad (60)$$

$$= \sigma \mathcal{E} \quad (61)$$

Leitfähigkeit:

$$\sigma = (en\mu_n + ep\mu_p) \quad \text{mit } [\sigma] = \Omega^{-1}m^{-1} \quad (62)$$

Spezifischer Widerstand:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{en\mu_n + ep\mu_p} \quad \text{mit } [\rho] = \Omega m \quad (63)$$

Bei dotierten Proben dominiert eine Art von Ladungsträgern.

$$\rho \approx \begin{cases} \frac{1}{en\mu_n} & \text{bei n-Dotierung} \\ \frac{1}{ep\mu_p} & \text{bei p-Dotierung} \end{cases} \quad (64)$$

Bei einer n-Dotierung ist die Leitfähigkeit:

$$\sigma \approx en\mu = en \frac{e\tau_m}{m^*} = \frac{ne^2\tau_m}{m^*} \quad (65)$$

Analoges gilt für p-Dotierung.

³ $j = en\mu \mathcal{E}$ ist positiv, da bei Elektronen die Geschwindigkeit negativ ist.

4.2.3 Streuprozesse

Vielzahl von Streuprozessen: Streuung an

1. Verunreinigungen (Dotierungen)
2. Phononen (akustisch & optisch)
3. Ladungsträgern
4.

Summe aller Streuprozesse

Nach der Matthies'schen Regel ergibt sich:

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_{m,lattice}} + \frac{1}{\tau_{m,impurities}} + \frac{1}{\tau_{m,carriers}} + \dots \quad (66)$$

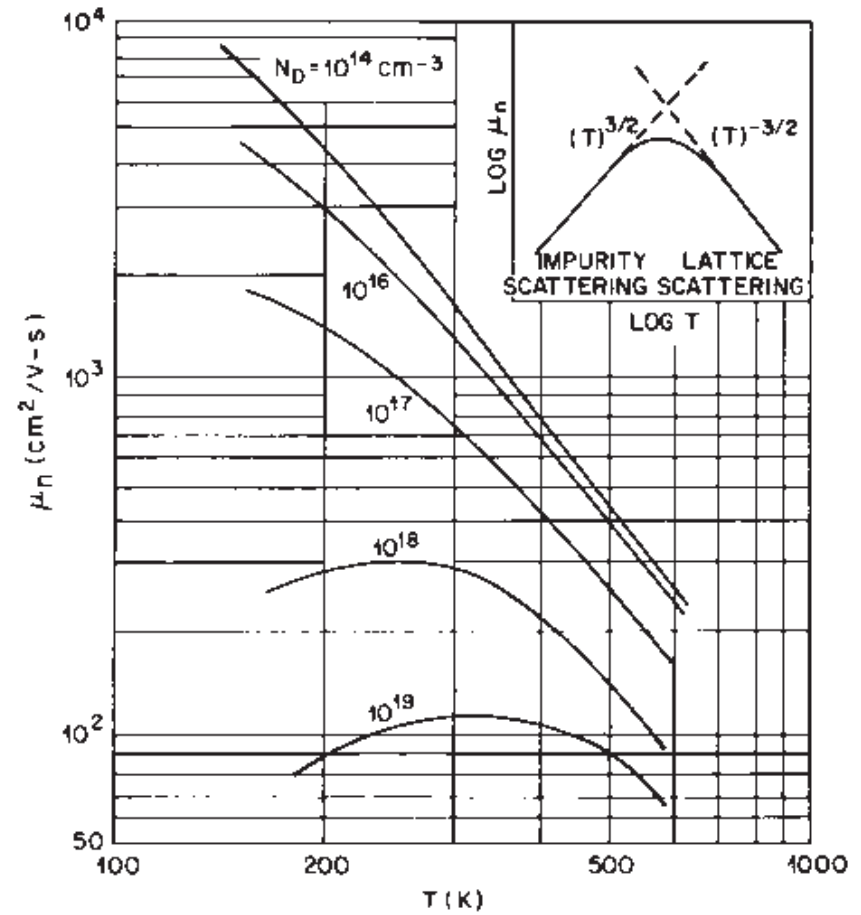


Abbildung 4.5: Temperaturabhängigkeit der Mobilität der Elektronen in Si für verschiedene n-Dotierungsdichten. Nach Ref. [2], S. 33.

4.3 Diffusion von Ladungsträgern

4.3.1 Diffusionsprozess

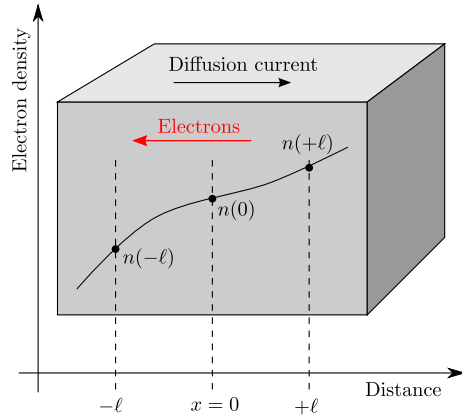


Abbildung 4.6: Elektronendichte und Ströme. Nach Ref. [2], S. 41.

Annahmen:

1. thermische Geschwindigkeit v_{th}
2. freie Weglänge ℓ
3. Streuzeit τ_m

Betrachte in Abb. 4.6 die Ebene bei $x = 0$. Die Rate R_1 , mit der sich Elektronen von links nach rechts durch eine Ebene bewegen, ist:

$$R_1 = \left[\frac{1}{2} n(-\ell) \right] \frac{\ell}{\tau_m} = \frac{1}{2} n(-\ell) \cdot v_{th} \quad (67)$$

Und von rechts nach links:

$$R_2 = \frac{1}{2} n(\ell) \cdot v_{th} \quad (68)$$

Die Gesamtrate:

$$R = R_1 - R_2 = \frac{1}{2} v_{th} [n(-\ell) - n(\ell)] \quad (69)$$

Taylor-Reihe um $n(x = 0)$:

$$R = \frac{1}{2} v_{th} \left\{ \left[n(0) - \ell \frac{dn}{dx} \right] - \left[n(0) + \ell \frac{dn}{dx} \right] \right\} \quad (70)$$

$$= -v_{th} \ell \frac{dn}{dx} \quad (71)$$

$$= -D \frac{dn}{dx} \quad (72)$$

Def. Diffusionskonstante: $D = v_{th} \cdot \ell$ mit Einheit $[D] = \text{m}^2/\text{s}$

Stromdichte von Elektronen durch Diffusion:

$$j_n = -eR = eD \frac{dn}{dx} \quad (73)$$

4.3.2 Einstein-Smoluchowski-Relation

Es war:

$$D = v_{th} \cdot \ell = v_{th}^2 \cdot \tau_m \quad (74)$$

und

$$\mu = \frac{e\tau_m}{m^*} \Rightarrow \tau_m = \frac{m\mu}{e} \quad (75)$$

also:

$$D = v_{th}^2 \cdot \frac{m\mu}{e} \quad (76)$$

5 Der pn-Übergang

Ziele:

1. Verständnis der Physik des pn-Übergangs
2. Diskussion der elektrischen Eigenschaften von pn-Dioden

Stichworte: Thermisches Gleichgewicht, Verarmungszone, abrupter und linearer pn-Übergang, Strom-Spannungs-Kennlinie, Kapazitäts-Spannungs-Kurve, Zener-Effekt

Lehrbuch: z.B. S.M. Sze [2]

Anregung: Wie läßt sich eine nichtlineare Arbeitsweise eines Halbleiters erzielen?

Nichtlinearer Response:

- z.B. $I/U \neq const$
- Grundvoraussetzung für AND, NAND, Speicher, etc...

Bisher:

- linearer Response eines Halbleiters: $I(U) \rightarrow$ Ohmsches Gesetz
- nichtlinear: Temperaturabhängigkeit, aber technisch nicht relevant



Abbildung 5.1: Schaltsymbol der Diode. Die ideale Diode sperrt jeden Stromfluss entgegen der Pfeilrichtung.

Charakteristik der pn-Diode: s. Abb. 5.2

1. Durchlass-Richtung (forward bias): Stromfluss
2. Sperr-Richtung (reverse bias): kein Stromfluss
3. Durchbruch (break-down): abrupter Anstieg des Stromflusses

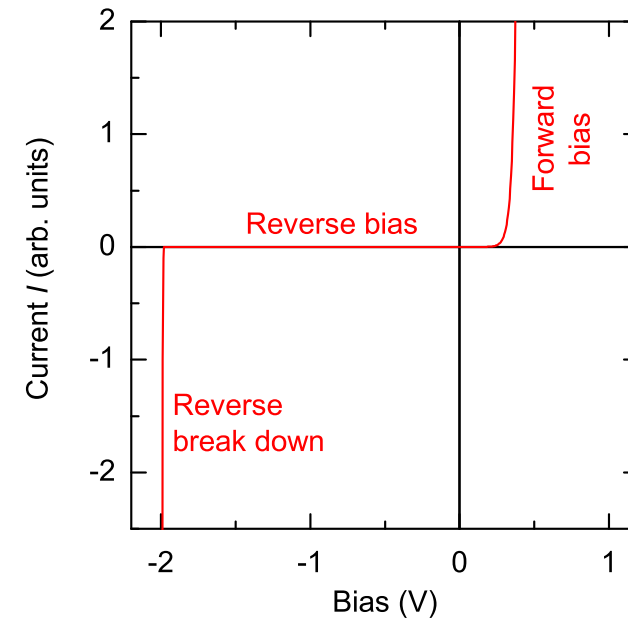


Abbildung 5.2: Strom-Spannungs-Kennlinie eines pn-Übergangs.

5.1 Thermisches Gleichgewicht

Herstellung eines pn-Übergangs:

1. Epitaxie von verschiedenen dotierten Halbleitern
2. Eindiffusion von Dotierungen
3. Implantation von Dotierungen

5.1.1 Gedankenexperiment: Schichten zusammenfügen

1. Ziel: Bestimmung der Ladungsträger-Dichten (nicht Dotierungsdichten)
2. Abb. 5.3: Unterschiedliche Fermi-Niveaus
3. Transportmechanismen: Diffusion & Drift

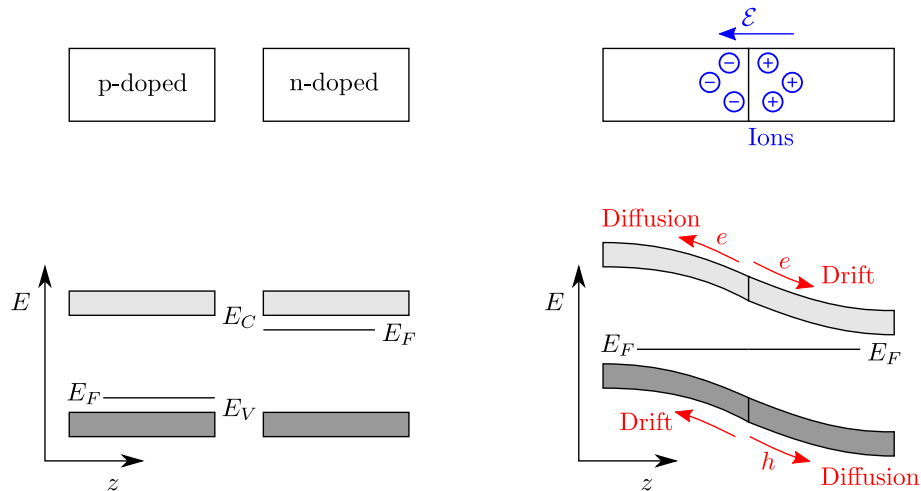


Abbildung 5.3: Gedankenexperiment: Unterschiedlich dotierte Halbleiter werden zusammengefügt. Beachte das elektrische Feld, welches durch verbleibenden Ionen entsteht, nachdem die Ladungsträger ins Nachbar-material diffundiert sind. Nach Ref. [2], S. 71.

Fragen:

- Bandstruktur im Gleichgewicht?
- oder: Kriterium für Abbruch des Transportes?

Diffusion:

- Löcher von p-Region zur n-Region
- Elektronen von n-Region zur p-Region
- diffundierte Minoritätsladungsträger rekombinieren mit Majoritäts-Ladungsträgern
- Konsequenz:
 - in p-Region: N_A^- aber zu wenig Löcher, also unkompenziert
 - in n-Region: N_D^+ aber zu wenig Elektronen, also unkompenziert
 - Aufbau eines elektrischen Feldes

Wichtige Gleichungen der Elektrostatik:

$$\psi = \frac{-E_i}{q} \quad \text{Zusammenhang Potential \& Bandstruktur} \quad (77)$$

$$\mathcal{E} = \frac{-d\psi}{dx} \quad \text{Elektrisches Feld \& Potential} \quad (78)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-\rho}{\epsilon\epsilon_0} \quad \text{Poisson-Gleichung} \quad (79)$$

Elektrisches Feld verursacht Drift:

- Löcher von n-Region zur p-Region
- Elektronen von p-Region zur n-Region

5.1.2 Modell der abrupten Diode

Gleichgewicht:

$$j_{diff} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_F}{dx} = 0 \quad (80)$$

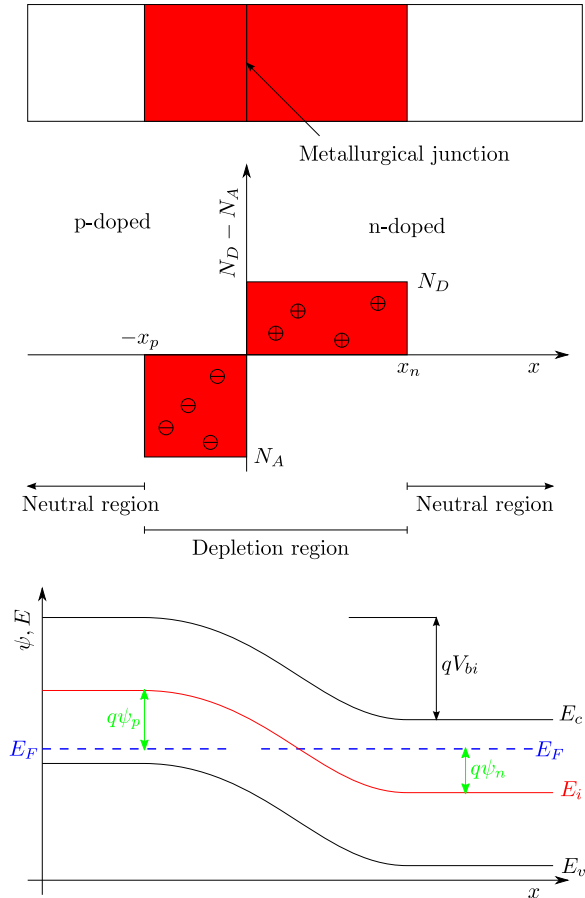


Abbildung 5.4: Oben: pn-Übergang mit abrupter Dotierung. Mitte: Ladungsprofil. Unten: Bandstruktur. Nach Ref. [2], S. 74.

Der gesamte Potentialabfall ist dann das eingebaute Potential (built-in

potential):

$$V_{bi} = \psi_n - \psi_p = \frac{k_B T}{e} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right) \quad (81)$$

Diffusions-Potential: V_{bi} heißt auch Diffusionspotential, da die Ursache in der Diffusion liegt.

Diskussion:

1. s. Abb. 5.4
2. metallurgischer Kontakt
3. Verarmungs-Zone (depletion region)
 - keine Elektronen
 - keine Löcher
 - nur Ionen der Dotier-Atome
4. Übergangs-Region (transition region), in Abb. 5.4 nicht gezeigt
 - teilweise Kompensation der Ladung der Ionen durch zugehörige mobile Ladungsträger
5. Näherung: vernachlässige Übergangs-Zone
 - nähere Dichten in der Raumladungszone als Rechtecke

In einer vollständig verarmten Region:

- existieren nur N_A und N_D
- wodurch sich die Poisson-Gleichung vereinfacht

$$\nabla^2 \psi = \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (N_A - N_D) \quad (82)$$

5.2 Verarmungs-Zone

Nach Abb. 5.5 lauten die Poisson-Gleichungen:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = \begin{cases} \frac{qN_A}{\epsilon\epsilon_0} & \text{für } -x_p \leq x < 0 \\ \frac{-qN_D}{\epsilon\epsilon_0} & \text{für } 0 \leq x < x_n \end{cases} \quad (83)$$

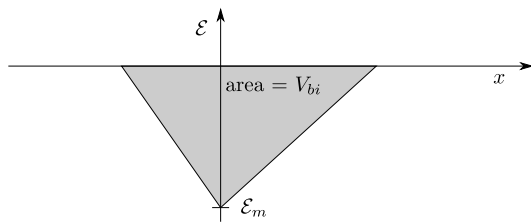
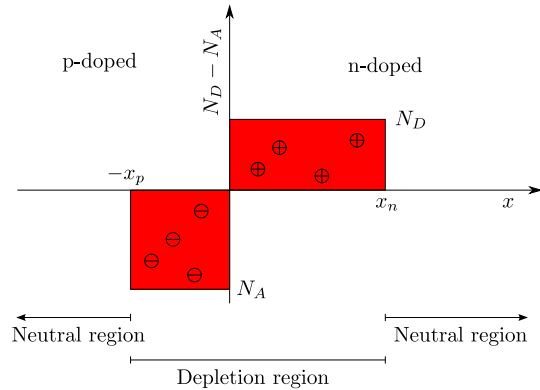


Abbildung 5.5: Verteilung der Raumladung (oben) und elektrisches Feld (unten) in einem abrupten Übergang. Die Fläche unter der Kurve des elektrischen Feldes entspricht dem eingebauten Potential. Nach Ref. [2], S. 77.

Ladungsneutralität: (wichtige Hilfe)

$$N_A x_p = N_D x_n \quad (84)$$

Breite der Verarmungszone $[-x_p, x_n]$:

$$W = x_n + x_p \quad (85)$$

durch Integration der Poisson-Gleichungen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$:

$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \cdot V_{bi}} \quad (86)$$

Generelle Formulierung ist:

$$W(N_0) = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_s V_{bi}}{e N_0}} \quad (87)$$

mit der reduzierten Dotierung

$$\frac{1}{N_0} = \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \quad (88)$$

Merke: Die niedrigere Dotierung bestimmt die Breite der Verarmungszone W .

Stark ungleiche Dotierungen:

- üblicher Fall
- s. Abb. 5.6
- $N_D \gg N_A$ oder $N_D \ll N_A$
- leichtere Dotierung N_B

Beispiel: Einseitig abrupter Übergang in Silizium:

Es sei $N_A = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ und $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Bei 300 K sei $n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $\epsilon_s \approx 13$.

$$V_{bi} = \frac{k_B T}{e} \log \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right) = 0.755 \text{ V} \quad (89)$$

$$W \approx x_n \approx \sqrt{\frac{2\epsilon_s \epsilon_0 V_{bi}}{e N_D}} = 330 \text{ nm} \quad (90)$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{e N_D x_n}{\epsilon_s \epsilon_0} = 4.6 \text{ MV/m} = 46 \text{ kV/cm} \quad (91)$$

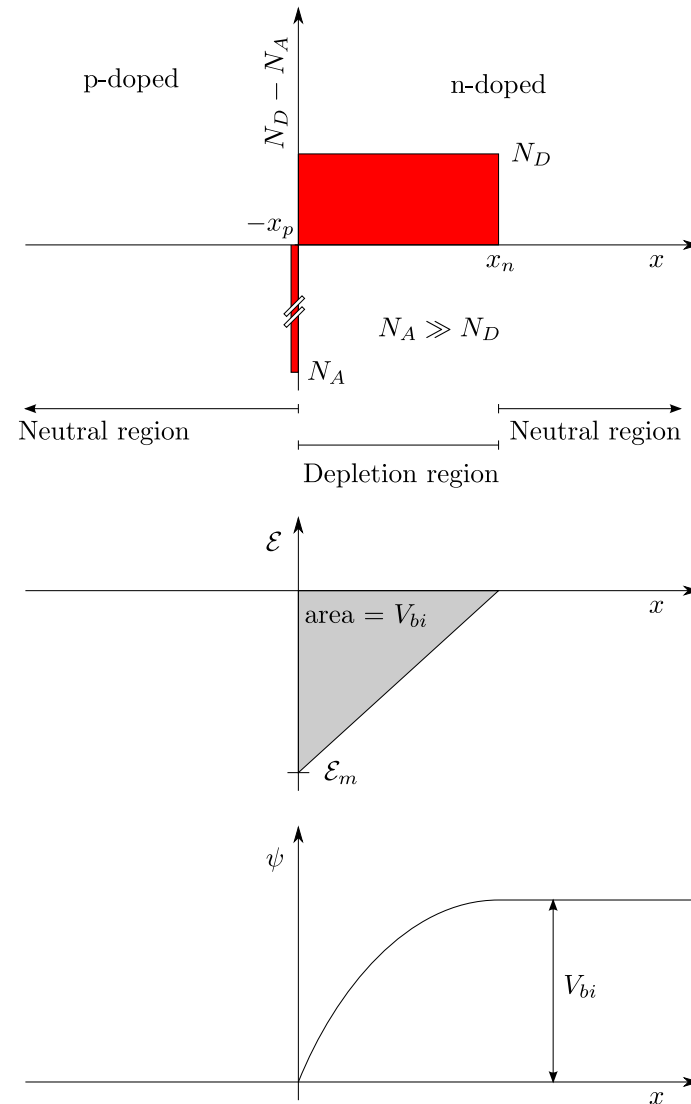


Abbildung 5.6: Einseitig abrupter Übergang. Nach Ref. [2], S. 78.

5.2.1 Vorspannung des pn-Übergangs

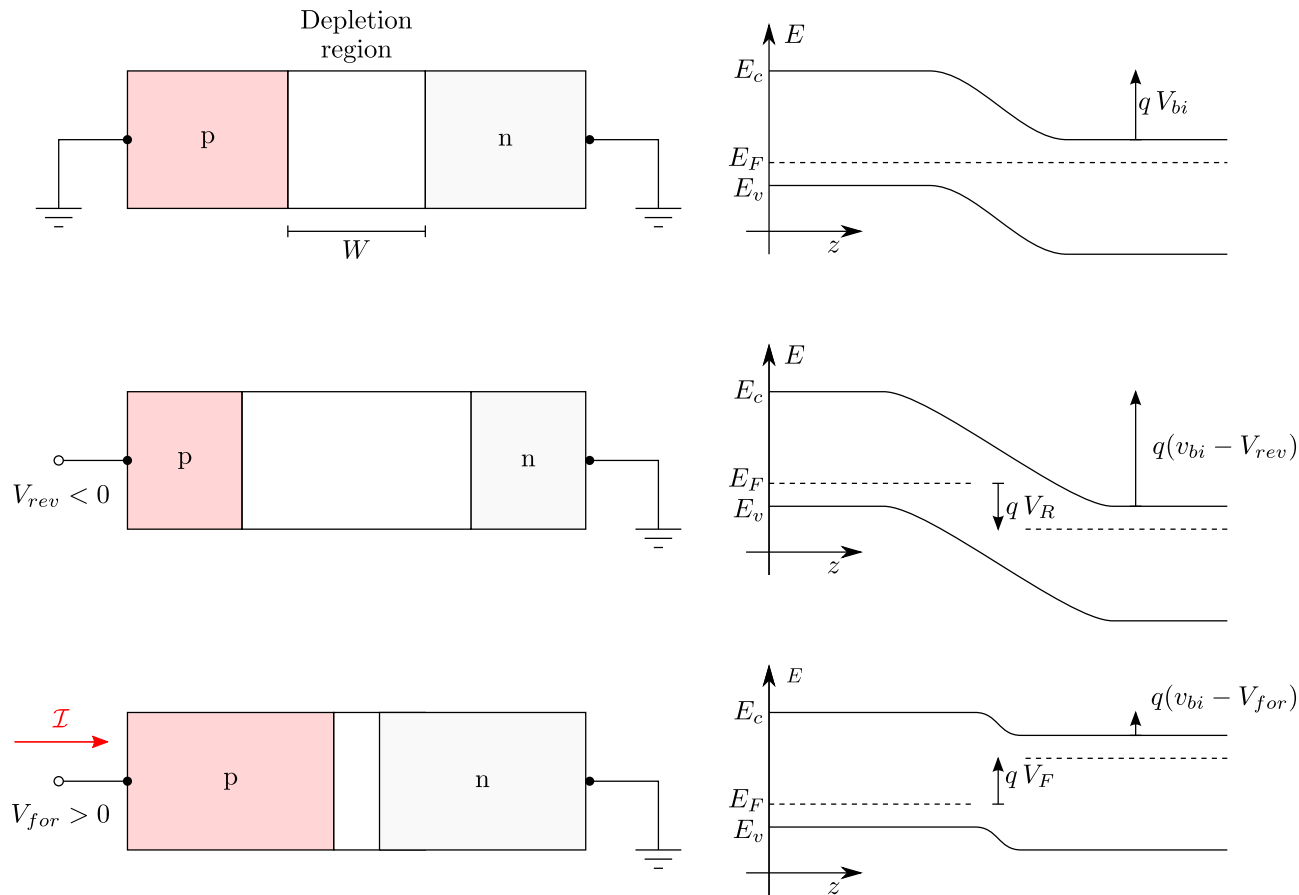


Abbildung 5.7: pn-Übergang unter verschiedenen Vorspannungen.

Bisher: Gleichgewicht

Jetzt: Anlegen einer Spannung V

1. Potentiale addieren sich

$$V_{\Sigma} = V_{bi} - V$$

2. Konsequenz:

- positives Potential an einem Kontakt
- Bandkante \downarrow

3. Breite der Verarmungs-Zone: mit Substitution

$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon(V_{bi} - V)}{eN_B}}$$

Abhängigkeit von der Spannung V :

1. positives Potential an p-Kontakt:

- p-Seite wird abgesenkt
- Raumladungszone verkleinert sich
- Durchlass-Richtung

2. negatives Potential an p-Kontakt:

- p-Seite wird angehoben
- Raumladungszone vergrößert sich
- Sperr-Richtung

5.3 Kapazität der Verarmungszone

Situation:

- bei Sperrspannung vernachlässigbarer Sperrstrom
- Vergrößerung der Sperrspannung V :
 - Vergrößerung der Raumladungszone
 - Ladungen müssen abtransportiert werden
 - Stromfluss

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = C_s \cdot \frac{dV}{dt} \quad (92)$$

Die Breite der Verarmungszone auf der n-dotierten Seite war:

$$x_n = \frac{1}{N_D} \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 V_{bi}}{e} N_o} \quad (93)$$

so dass:

$$Q_p = -Q_n = -eN_D x_n A = -A \sqrt{2\epsilon\epsilon_0 e (V_{bi} - V) N_o} \quad (94)$$

Ableiten nach der Spannung liefert die Kapazität:

$$C_s = \frac{dQ}{dV} = A \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0 e N_o}{2(V_{bi} - V)}} \approx A \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0 e N_B}{2(V_{bi} - V)}} \quad (95)$$

Auffällig:

- die Kapazität hängt von der angelegten Spannung ab
- Bauelement: Varaktor

5.4 Strom-Spannungs-Kennlinie

Fragestellung: Wie kann man Stromfluss erreichen?

Bisher:

- Raumladungszone ohne Ladungsträger
- daher kein Stromfluss

Zentrale Mechanismen:

- Diffusion der Ladungsträger
- werden im anderen Gebiet zu Minoritäts-Ladungsträgern
- rekombinieren dort mit Majoritäts-Ladungsträgern
- Vorspannungen vergrößern/verkleinern die Raumladungszone und schalten Stromfluss ein oder aus.

Wie gelangen Ladungen durch die RLZ?

- Diffusionslängen müssen durch die Raumladungszone reichen

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \gg W \quad L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \gg W \quad (96)$$

- Rekombinationszeiten: τ_n und τ_p
- Diffusionslängen sind durch Rekombinationszeiten begrenzt
- Rekombination: hauptsächlich im feldfreien Bereich
- wenig Rekombination in der Raumladungszone (Verarmungszone)

Bezeichnungen für Gleichgewicht: (Index 0)

$p_{p0} \approx N_A$ Löcher als Majoritäts-Ladungsträger in p-dotiertem Bereich

$p_{n0} = \frac{n_i^2}{N_D}$ Löcher als Minoritäts-Ladungsträger in n-dotiertem Bereich

$n_{n0} \approx N_D$ Elektronen als Majoritäts-Ladungsträger in n-Bereich

$n_{p0} = \frac{n_i^2}{N_A}$ Elektronen als Minoritäts-Ladungsträger in p-Bereich

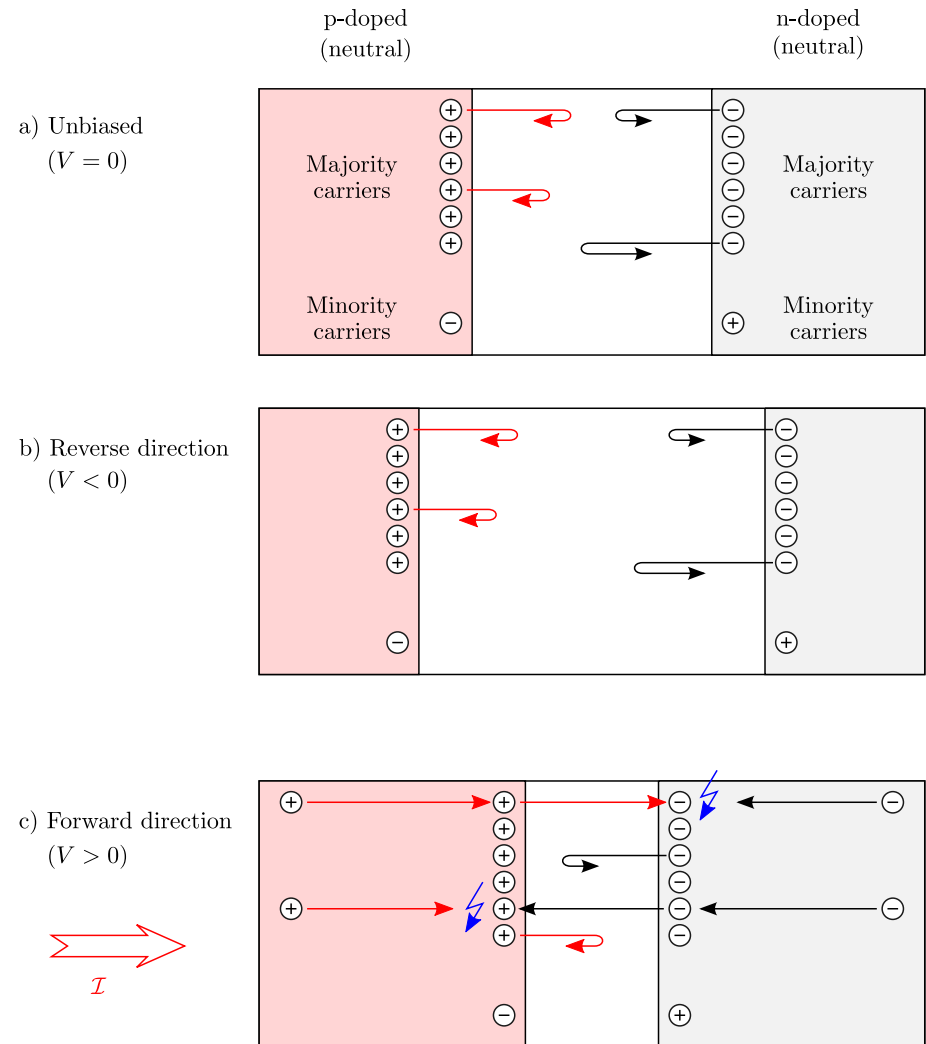


Abbildung 5.8: Stromfluss im pn-Übergang unter verschiedenen externen Vorspannungen.

5.4.1 Shockley-Gleichung

Diffusions-Strom: Löcher bei $x = x_n$. Ohne Herleitung

$$j_p(x_n) = -eD_p \left. \frac{dp_n}{dx} \right|_{x_n} = \frac{eD_p p_{n0}}{L_p} (e^{eV/k_B T} - 1) \quad (97)$$

Diffusions-Strom: Elektronen bei $x = -x_p$

$$j_n(-x_p) = eD_n \left. \frac{dn_p}{dx} \right|_{-x_p} = \frac{eD_n n_{p0}}{L_n} (e^{eV/k_B T} - 1) \quad (98)$$

Fazit: in den neutralen Zonen (außerhalb der Verarmungszone) zeigen die Minoritäts-Ladungsträger:

- eine exponentiell abfallende Dichte
- einen exponentiell abfallenden Diffusions-Strom

Gesamtstrom: Shockley-Gleichung

$$j = j_p(x_n) + j_n(x_p) = j_s (e^{eV/k_B T} - 1) \quad (99)$$

Wichtig:

- Strom durch Diffusion gegeben!
- mit der Sättigungs-Stromdichte:

$$j_s = \frac{eD_p p_{n0}}{L_p} + \frac{eD_n n_{p0}}{L_n} \quad (100)$$

Diskussion der Kennlinie einer idealen pn-Diode:

1. s. Abb. 5.9
2. negativer Bereich: Sättigung bei j_s
3. positiver Bereich: exponentiell konstanter Zuwachs des Stromes
4. Exponent $eV/k_B T$: eine Dekade Stromänderung benötigt Spannungsanstieg von 60 mV
5. Nulldurchgang

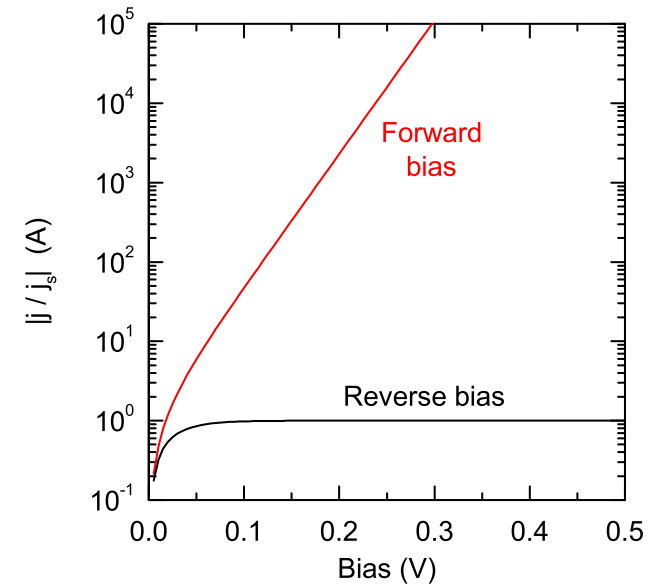


Abbildung 5.9: Ideale Strom-Spannungs-Kennlinie eines pn-Übergangs. Für den Sperrbereich ist der negative Strom gezeigt.

5.5 Kurze Diode

Abmessungen:

- typische Diffusions-Längen $L_p, L_n \approx 100 \mu\text{m}$
- typische pn-Übergänge $W \approx 1 \mu\text{m}$
- lineare Diode wichtig für Verständnis des Transistors

In Verarmungszone:

- keine nennenswerte Rekombination
- daher konstanter Lochstrom

$$\frac{dj_p}{dx} = 0 \quad (101)$$

$$j_p = -eD_p \frac{dp}{dx} \quad (102)$$

- $p(x)$ ist linear in der Verarmungszone

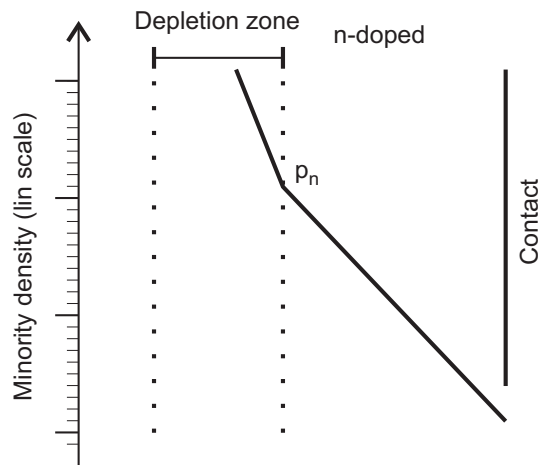


Abbildung 5.10: Kurze Diode. Beachte den linearen Maßstab.

5.6 Durchbruch

Mechanismen:

1. Lawinen-Durchbruch (Avalanche) durch Stoßionisation
2. Zener-Effekt durch Tunneln
3. thermischer Durchbruch bei Erwärmung

5.6.1 Lawinendurchbruch

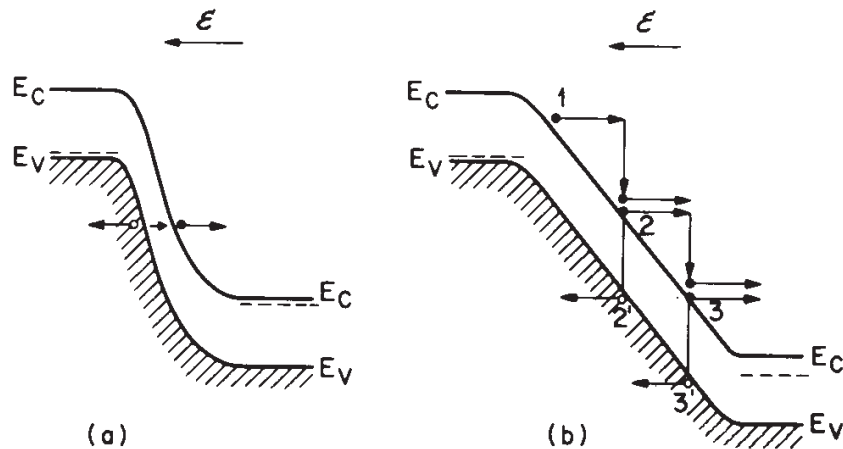


Abbildung 5.11: Zum Tunnel-Durchbruch (a) and Lawinen-Durchbruch (b). Nach Ref. [2], S. 101.

Lawinen-Durchbruch:

- breakdown voltage V_{break}
- ab einem kritischen Feld \mathcal{E}_{break}
- ausreichender Energiegewinn für Stoßionisation
- Ermittlung von V_{break} über Poisson-Gleichung

In der Verarmungszone eines abrupten Übergangs:

$$\mathcal{E} = \int \frac{e\rho}{\epsilon\epsilon_0} dx = \frac{eWN_B}{\epsilon\epsilon_0} \quad (103)$$

mit N_B als Dichte der niederdotierten Seite ergibt für die Durchbruchspannung: ⁴

$$V_{break} = \frac{\mathcal{E}_c W}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 \mathcal{E}_c^2}{2eN_B} \quad (104)$$

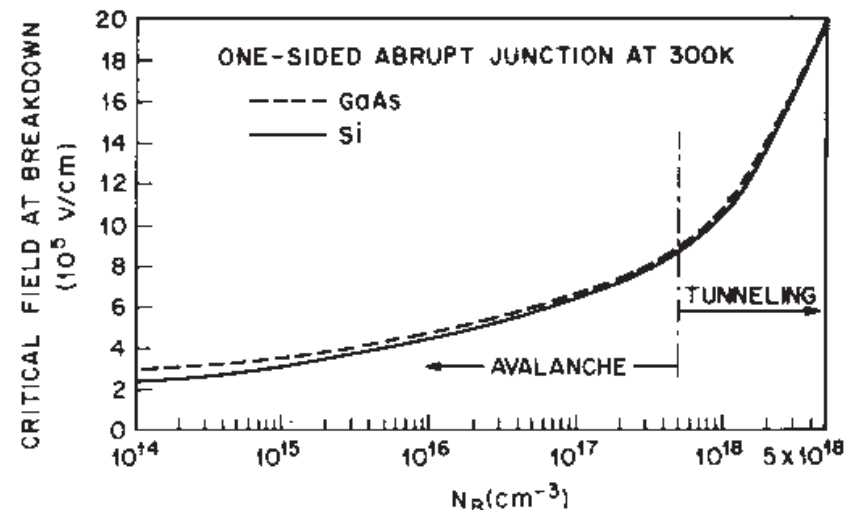


Abbildung 5.12: Kritische Spannungen für Si und GaAs in Abhängigkeit von der Dotierdichte. Oberhalb von etwa $5 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ dominiert der Zener-Effekt. Nach Ref. [2], S. 103.

⁴Faktor 2 durch Integration über linear abfallendes Feld

5.6.2 Zener-Effekt

- Clarence Melvin Zener (1905 -1993)
- s. Abb. 5.13
- sehr starke Sperrspannung
- separierte Quasi-Ferminiveaus
- Tunneln von Valenzelektronen ins Leitungsband
- Voraussetzung
 - Sperrspannung $U_{min} = eE_g$
 - Δx klein, damit Tunneleffekt wahrscheinlich

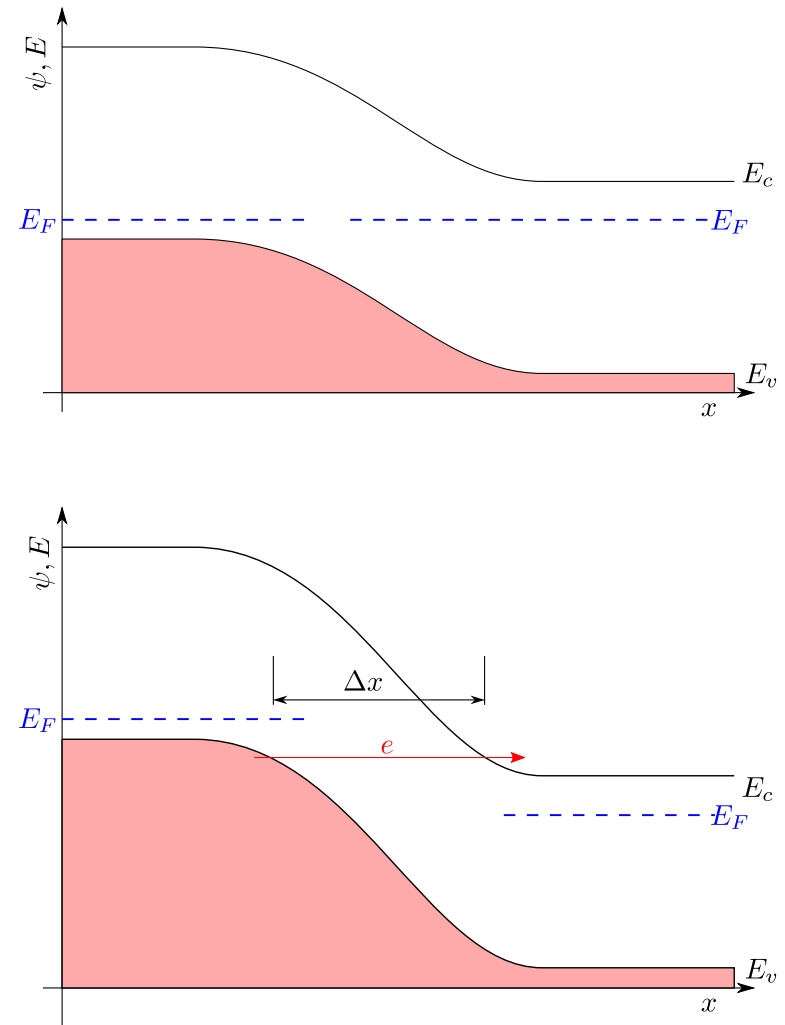


Abbildung 5.13: Zum Zener-Effekt. Die Quasi-Ferminiveaus sind mit E_{Fp} und E_{Fn} bezeichnet.

5.6.3 Tunnelodiode

1. oder Esaki-Diode, Leo Esaki, Nobelpreis 1973 für experimentelle Untersuchungen zu Tunnelphänomenen
2. Anwendung des Zener-Effekts
3. Resultat:
 - nichtlineare IV -Kennlinie
 - Bereich mit negativ differentiellem Widerstand (s. Abb. 5.15)
 - wie Gunn-Effekt
 - einsetzbar als GHz-Oszillator

Aufbau und Funktion:

- p^+n^+ -Diode
- Konsequenz:
 - dünne Verarmungszone
 - Tunnelprozess wahrscheinlich
- Spannungsbereiche: (s. Abb. 5.14)
 - Sperrspannung (unangebrachter Ausdruck), Tunnelstrom, aber entgegengesetzt (a)
 - ohne Spannung: kein Strom (b)
 - leichte Vorwärtsspannung: Tunnelstrom (c)
 - stärkere Vorwärtsspannung: Abnahme des Tunnelstroms (d)
 - starke Vorwärtsspannung: üblicher Durchlassstrom einer pn-Diode (d)

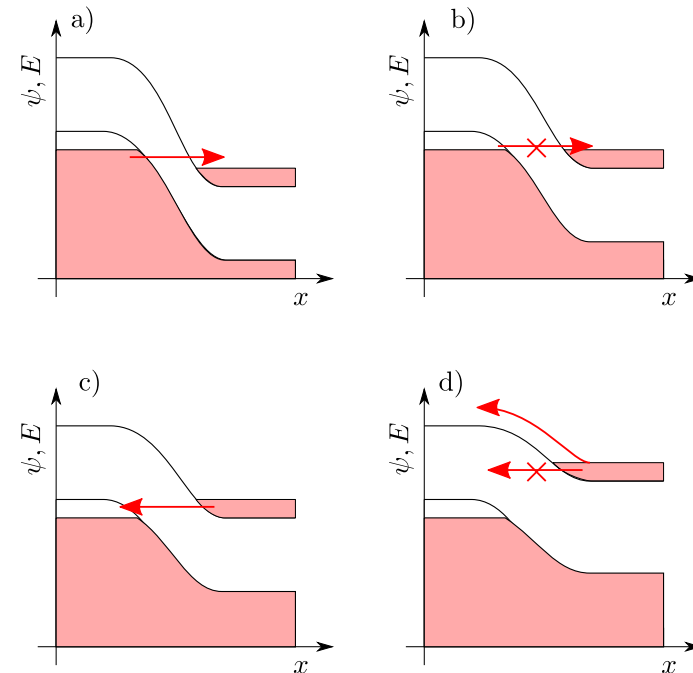


Abbildung 5.14: Tunnelodiode. a) Sperrspannung, b) keine Spannung, c) leichte Vorwärtsspannung und d) starke Vorwärtsspannung.

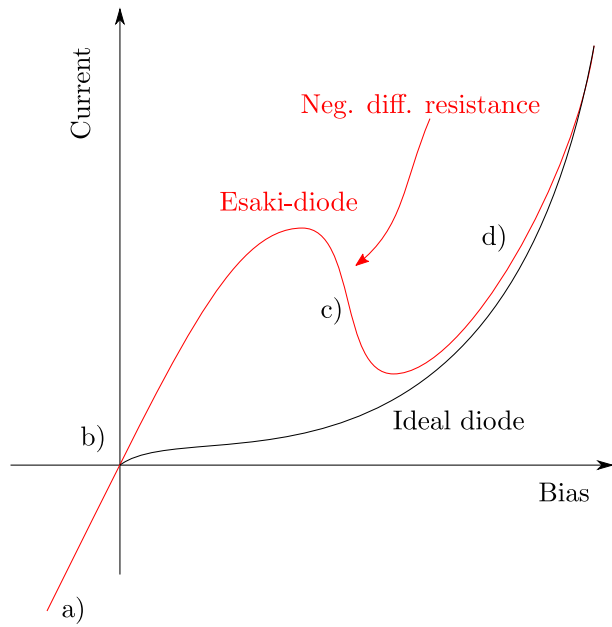


Abbildung 5.15: Schema zur Kennlinie einer Esaki-Diode.

8 Literatur

Literatur

- [1] J. Bardeen and W. Brattain, *The transistor: A semiconductor triode*, Phys. Rev. **74**, 230 (1948).
- [2] S. Sze, *Semiconductor Devices*, John Wiley & Sons, 1985.
- [3] B. Saleh and M. Teich, *Fundamentals of photonics*, John Wiley and Sons, 1991.
- [4] K. Seeger, *Semiconductor Physics*, Springer, 2004.
- [5] P. Yu and M. Cardona, *Fundamentals of Semiconductors*, Springer, 1995.
- [6] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, 1996.
- [7] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, 1987.
- [8] P. Drude, *Zur Elektronentheorie der Metalle*, Ann. d. Physik **1**, 566 (1900).
- [9] F. Thuselt, *Physik der Halbleiterbauelemente*, Springer, 2011.