Kohärente Bildverarbeitung

Versuch im Rahmen des Praktikums für Fortgeschrittene

am
Lehrstuhl für BioMolekulare Optik
der
Sektion Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität München

aufgebaut als Zulassungsarbeit von
Diether Thumser, April 1993

überarbeitet von
Dr. H. Pulvermacher, September 2000
Dr. K.H. Mantel, November 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **1**
1.1 Hinweise zur Anleitung 1
1.1.1 Laserschutz 1
1.1.2 Lehr- und Lernziele 1

2 Vorkenntnisse / Schlagwortverzeichnis **3**
2.1 Wiederholungen 3
2.2 Mathematische Grundlagen 3
2.3 Physikalische Schlagwörter 3
2.4 Technische Geräte und Methoden 4
2.5 Literatur 4

3 Die Physik des Experiments **5**
3.1 Optische Abbildung 5
3.2 Fraunhofer-Beugung 6
3.3 Point Spread Function 8
3.4 Fourieroptik 8
3.4.1 Die Grundlagen 9
3.4.2 Fourieroptik und Beugung 9
3.4.3 Optische Übertragungsfunktion 10
3.4.4 Faltungstheorem und Beugung 10
3.5 Die Bildentstehung 12
3.6 Die Intensität bei kohärenter Beleuchtung 15
3.6.1 Darstellung im Ortsraum* 15
3.6.2 Darstellung im Frequenzraum* 16
3.7 Die Sliding-Window-Transformation 16
3.8 Zusammenfassung 17

4 Spezielle Eingriffe **19**
4.1 Spezielle Eingriffe und ihre Übertragungsfunktionen 19
4.1.1 Die Foucaultsche Schneide 19
4.1.2 Die Defokussierung 19
4.2 Experimente mit dem Rasterstern 21
4.2.1 Die Eigenschaften des Rastersterns 21
4.2.2 Rasterstern und Sliding-Window-Methode 22
4.2.3 Beugung am Rasterstern* 22
4.2.4 Rasterstern und Foucaultsche Schneide 23
4.2.5 Der defokussierte Rasterstern 24

4.2.6 Foucaultsche Schneide und defokussierter Rasterstern 25
4.3 Zusammenfassung 25
4.4 Inkohärente Beleuchtung 26
4.5 Fragen 26

5 Versuchsaufbau **29**
5.1 Das Prinzip 29
5.2 Die Optik 31
5.3 Die Bildbeobachtung 32
5.4 Der Raumfilter 33

6 Das experimentelle Programm **35**
6.1 Das Justieren der Apparatur 35
6.1.1 Vorbemerkungen 35
6.1.2 Fundamentale Justiertechniken 36
6.1.3 Die einzelnen Justierschritte 37
6.2 Versuchsdurchführung 40
6.2.1 Vorbemerkungen 40
6.2.2 Das Versuchsprogramm 40
6.3 Auswertung 42
6.3.1 Auswertung von Beugungsbildern 42
6.3.2 Auswertung der defokussierten Sternaufnahmen 43
6.3.3 Hinweise zur Ausarbeitung 43

A Grundregeln des Laserschutzes **45**

B Ein Beispiel zur Bildaufnahme **47**

C Mathematische Grundlagen **51**
C.1 Korrelation 51
C.2 Fouriertransformation 52
C.3 Die Dirac'sche Delta-Distribution 54
C.4 Fourier-Transformiertenpaare 54
C.5 Point Spread Function 54

Abbildungsverzeichnis **59**

Tabellenverzeichnis **61**

Index **63**

1 Vorbemerkungen

1.1 Hinweise zur Anleitung

Abschnitte die mit einem Stern gekennzeichnet sind (*) dienen zur Vertiefung des Stoffes und sind für die Vorbereitung auf das 1. Kolloquium nicht unbedingt erforderlich. Diese Abschnitte dienen dazu das Verständnis der Abbildungstheorie zu vertiefen.

1.1.1 Laserschutz

Warnung!

Sie arbeiten bei diesem Versuch mit einem Laser der Leistung **10 mW**. Gelangt der Laserstrahl ungeschwächt in Ihr Auge, so wird dieses schwer geschädigt. Aus Gründen des Laserschutzes ist jede in der Versuchsanleitung nicht genannte Veränderung der Apparatur zu unterlassen. Beachten Sie insbesondere die im Anhang A aufgeführten *Grundregeln des Laserschutzes.*

1.1.2 Lehr- und Lernziele

Intention dieses Versuches ist es, ein Verständnis dafür zu vermitteln, wie optische Systeme einfallendes Licht zu Bildern verarbeiten. Zur Beschreibung dieser Vorgänge ist die Fourieranalyse ein leistungsfähiges mathematisches Verfahren und bietet darüber hinaus eine hervorragende Möglichkeit, optische Vorgänge in der Terminologie *räumlicher Frequenzen* zu diskutieren. Schließlich ist man in der Lage, Aussagen über die Amplituden und Phasen der Lichtwellen, die sich im Bild „vereinen“, zu machen. Außerdem wird die Verarbeitung von Daten mittels einer optischen Apparatur demonstriert, womit ein kleiner Einblick in das auch technisch sehr interessante Gebiet optischer Datenverarbeitung gegeben wird. Die Bildverarbeitung im Computer beruht auf derselben mathematischen Basis.
Folgende drei Schwerpunkte haben sich herauskristallisiert:

1. In einer ersten Phase soll das in der Physik sehr wichtige mathematische Hilfsmittel der *Fouriertransformation* anhand einfacher Beispiele anschaulich demonstriert werden.

2. Im darauffolgenden Abschnitt wird eine physikalische Interpretation der einzelnen „Fourierkomponenten“ der Transformierten gegeben.

3. Zu guter Letzt, um Bilder - die räumliche Verteilung optischer Information - und ihre Übertragung durch optische Systeme zu verstehen, werden jene ganz gezielt durch *räumliche Filterung* beeinflußt.

Es lag nicht in unserem Sinne, alle Möglichkeiten der Apparatur auszureizen, sondern wir versuchten durch Reduktion auf das didaktisch Wichtige gerade die Anschauung zu unterstützen. Wir appellieren an Ihren physikalischen Spieltrieb und wünschen Ihnen deshalb

viel Spaß beim Experimentieren!

2 Vorkenntnisse / Schlagwortverzeichnis

Dieser Abschnitt soll Ihnen als Leitfaden für die Vorbereitung auf den Versuch dienen. Die weiter unten angeführten Punkte erheben durchaus nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, sondern wollen Sie zum eigenständigen Durcharbeiten der einschlägigen Literatur animieren. Unter diesem Aspekt sind auch die Literaturangaben am Ende dieses Abschnittes zu verstehen.

2.1 Wiederholungen

1. **Abbe'sche Abbildungstheorie**
2. Objektive und Fernrohre
3. Interferenz
4. Fraunhofersche Beugung an Spalt, Doppelspalt, Rechteck, Kreis, Gitter

2.2 Mathematische Grundlagen

1. Komplexe Darstellung der Wellenbewegung
2. **Fouriertransformation**
   a) Definition und Inversion
   b) Der zweidimensionale Fall
   c) Eigenschaften
3. Dirac'sche Delta-Distribution
4. Faltungstheorem mit Folgerungen

2.3 Physikalische Schlagwörter

1. Blendenöffnungsfunktion
2. Punktverwaschungsfunktion (point spread function)
3. Optisch lineares System
4. **Orts- oder Raumfrequenzen**

5. Auto-, Kreuzkorrelation
6. Kontrast, Modulation
7. Optische Übertragungsfunktion, Phasen-, Modulations-, Amplitudenübertragungsfunktion

2.4 Technische Geräte und Methoden

1. Zoomobjektive
2. Laser
3. Modenblende oder Raumfilter
4. Autokollimation

2.5 Literatur

- Erwerb der Grundkenntnisse
  1. *Hecht, Eugene:* OPTIK, Addison-Wesley, 1989
  2. *Bergmann, Schaefer:* LEHRBUCH DER EXPERIMENTALPHYSIK, Bd. 3, deGruyter, 1987
- Zur Vertiefung und Ergänzung
  1. *Röhler, Rainer:* INFORMATIONSTHEORIE IN DER OPTIK, WVG, 1967
  2. *Klein, Furtak:* OPTIK, Springer, 1988
  3. *Steward, E. G. :* FOURIER OPTICS, AN INTRODUCTION, Ellis Horwood Limited, 1989
  4. *Pulvermacher, H. :* OPTICAL TRANSFER FUNCTIONS
     in: Staudenmaier, H.M. (Ed.): Physics Experiments Using PCs, Springer, 1993, S. 219

3 Die Physik des Experiments

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten physikalischen Phänomene aus dem Bereich der Fraunhoferschen Beugung und der Abbildung wiederholt, eine kurze Einführung in die Fourieroptik gegeben und die Fouriertheorie auf Probleme der Beugungs- und Abbildungsoptik angewandt werden. Hierzu ist es hilfreich, wenn Sie sich zusätzlich die entsprechenden Kapitel in der angegebenen Literatur durchlesen. Wir empfehlen dringend die Lektüre von *E. Hecht, OPTIK, Kapitel 10.2, Kapitel 11, Kapitel 14.1* oder die entsprechenden Abschnitte in anderen Optiklehrbüchern.

3.1 Optische Abbildung

Im folgenden soll die Theorie der Abbildung eines Objekts durch ein *abbildendes System* dargestellt werden. Das abbildende System kann dabei aus nur einer Linse, oder auch aus einer ganzen Reihe von optischen Komponenten bestehen. Dabei sei stets die Ausdehnung des abbildenden Systems als groß gegenüber dem Objekt angenommen. Weiterhin sollen Abbildungsfehler, die durch Linsen bedingt sind (z.B. Koma, chromatische Abberation, etc.) vernachlässigt werden. Soweit nicht besonders spezifiziert soll die Beleuchtung stets durch eine ausgedehnte Lichtquelle mit monochromatischer, kohärenter Strahlung erfolgen.

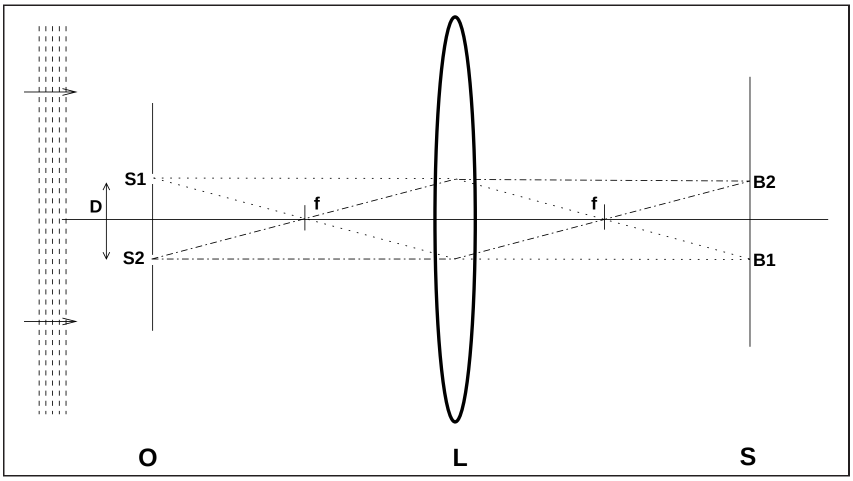

Abbildung 3.1: Abbildung eines Doppelspaltes durch eine Linse.

Abbildung 3.1 zeigt die Abbildung eines Doppelspaltes durch eine Linse. Ausgehend von den Gesetzen der geometrischen Optik können Lage und Größe des Bildes nach den bekannten Linsengleichungen konstruiert, bzw. berechnet werden. Die Gesetze der geometrischen Optik geben uns aber keinerlei Information über die Gründe, die für die Qualität der Abbildung entscheidend sind. Um die Grundlagen der optischen Abbildung näher zu verstehen, müssen wir deshalb über die geometrische Optik hinausgehen und den Wellencharakter von Licht berücksichtigen.

Das einfallende Licht wird am Objekt O in Gestalt der beiden Spalte $S1$ und $S2$ gebeugt. Die gebeugte Strahlung wird von der Linse L "verarbeitet", so dass wieder ein Bild des Objekts in Gestalt von $B1$ und $B2$ auf dem Schirm S entsteht. Bei der Beugung können zwei Extremfälle unterschieden werden, die Nahfeld-Beugung oder auch *Fresnelbeugung* und die Fernfeld-Beugung oder auch *Fraunhofer-Beugung*. Im folgenden wird nur die Fraunhofer-Beugung betrachtet.

3.2 Fraunhofer-Beugung

Unter dem Begriff Fraunhofer-Beugung werden die Beugungserscheinungen zusammengefasst, die im großem Abstand vom Objekt sichtbar sind. Dies bedeutet, dass die Beugungserscheinungen quasi im Unendlichen beobachtet werden. Mit dem optischen Aufbau von Abb. 3.1 entstehen diese Beugungserscheinungen in der Brennebene der Linse L, da hier die Strahlen, die vor der Linse L parallel laufen, also aus dem Unendlichen kommen, ein Zwischenbild – das Beugungsbild – erzeugen. Dieses Beugungsbild läßt sich sichtbar machen, indem ein Schirm in der Brennebene der Linse L aufgestellt wird. Abbildung 3.2 zeigt dies für zwei parallele Wellenzüge, die durch Beugung am Doppelspalt $S1$ und $S2$ entstehen und im Punkt P in der Brennebene F der Linse interferieren.

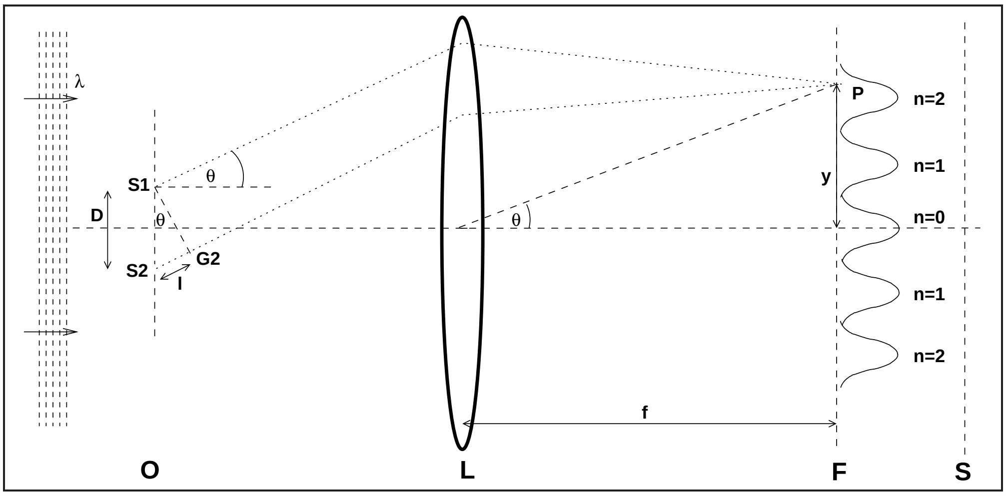

Abbildung 3.2: Beugung am Doppelspalt.

In Abhängigkeit vom Wegunterschied l der beiden Wellenzüge, entsteht konstruktive oder destruktive Interferenz in der Brennebene der Linse. (Die Strecke $\overline{S_1P}$ ist wegen des Fermatschen Prinzips gleich $\overline{G_2P}$). Für konstruktive Interferenz muss der

Wegunterschied l ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ sein:

$$\sin(\Theta) = \frac{l}{D} \stackrel{!}{=} \frac{n \cdot \lambda}{D} = \frac{y}{f} \tag{3.1}$$

Wenn wir nur eine bestimmte Ordnung ($n = 1$) betrachten, ergibt sich für den Abstand des Interferenzmusters von der optischen Achse:

$$y = \frac{f \cdot \lambda}{D} \tag{3.2}$$

Der Abstand des Interferenzmusters von der optischen Achse in der Brennebene der Linse ist also umgekehrt proportional zur Größe des Objekts. Wellenzüge, die von sehr kleinen Strukturen im Objekt herrühren werden also durch konstruktive Interferenz weit außen in der Brennebene abgebildet, hingegen werden Wellenzüge, die von großen Strukturen herrühren in der Nähe der optischen Achse abgebildet. So entstehen im Beugungsbild Interferenzmuster die umgekehrt proportional zur räumlichen Ausdehnung im Objekt sind und linear in der Beugungsebene angeordnet sind. Diese umgekehrte Proportionalität zur Objektebene führte zum Begriff des *reziproken Raumes* für die Brennebene der Linse. Der Kehrwert einer räumlichen Ausdehnung hat (bis auf die Konstante $\nu = \frac{c}{\lambda}$) die Einheit einer Frequenz, man spricht deshalb auch vom *Frequenzraum* und den *Ortsfrequenzen* bzw. *Raumfrequenzen* des Objekts, die im Frequenzraum abgebildet werden. Das Fraunhofersche Beugungsbild liefert somit eine Verteilung der Bildinformation sortiert nach ihren Frequenzanteilen. Die Bedeutung der Ortsfrequenz liegt darin, dass sie eine im Experiment beobachtbare Größe ist.

Das Fraunhofersche Beugungsbild sortiert die Bildinformation nach Strahlenbündel, die vor der Linse parallel zueinander verlaufen. Da dazu immer mehrere Strahlen erforderlich sind (mindestens 2), entstehen diese Strahlen immer an periodischen Strukturen. Alle periodischen Strukturen im Bild werden also im Fraunhoferschen Beugungsbild abgebildet. Nur rein singuläre Strukturen sind dort nicht sichtbar. Das Fraunhofersche Beugungsbild ist somit eine Analyse der Bildinformation nach periodischen Bildstrukturen.

Das Fraunhofersche Beugungsbild im reziproken Raum kann aus der Intensitätsverteilung in der Objektebene, der sog. *Blendenöffnungsfunktion* direkt berechnet werden (siehe dazu die einschlägige Fachliteratur). Es ergibt sich für eine Abbildung durch eine Linse:

$$\boxed{E'(X,Y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau(x,y) e^{-2\pi i \frac{Xx+Yy}{\lambda f}}\, dxdy.} \tag{3.3}$$

Wobei $E'(X,Y)$ das Fraunhofersche Beugungsbild, $\tau(x,y)$ die Blendenöffnungsfunktion, λ die Wellenlänge des Lichts, f die Brennweite der Linse, x, y die Koordinaten in der Objektebene und X, Y die Koordinaten in der Beugungsebene der Linse sind.

Dieses Integral ist aber gleichzeitig die Fouriertransformierte der Blendenöffnungsfunktion (siehe Anhang C.2). Man kann also ganz allgemein sagen, dass das Fraunhofersche Beugungsbild die Fouriertransformierte der Blendenöffnungsfunktion ist. Eine Linse kann somit als ein *Fouriertransformator* betrachtet werden.

3.3 Point Spread Function

Wir haben bisher Beugung diskutiert, die am Objekt entsteht. Bei einer Abbildung durch eine Linse treten jedoch auch Beugungseffekte an der Linsenöffnung selbst auf, die ebenfalls berücksichtigt werden müssen.

Da die Linse nur eine endliche Größe hat, gibt es offensichtlich einen Grenzwinkel der einfallenden gebeugten Strahlung vom Objekt und damit eine Grenzfrequenz für *kleinste* Strukturen die durch die Linse gerade noch übertragen werden. Diese Grenzfrequenz hängt offensichtlich lediglich vom Durchmesser der Linse ab (siehe Abb. 3.3).

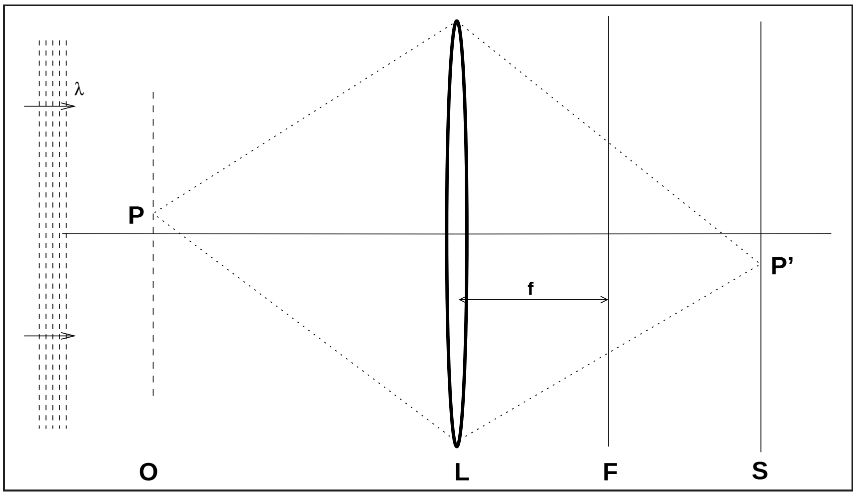

Abbildung 3.3: Abbildung eines Punktes, Punktverwaschungsfunktion.

Diese Grenzfrequenz bestimmt die kleinsten Strukturen, die im Bild sichtbar, sie legt damit die Auflösung (d.h. die Qualität) im Bild fest. Mathematisch läßt sich die Qualität einer Abbildung durch ein optisches System durch die sog. *Punktverwaschungsfunktion* (PSF) beschreiben (im Englischen *point spread function*, gelegentlich wird auch der Ausdruck *spatial redistribution function* verwendet). Die PSF beschreibt die Abbildung eines punktförmigen Objektes das im Unendlichen liegt. Im Idealfall würde ein Punkt wieder als Punkt in die Brennebene abgebildet werden. Auf Grund der Grenzfrequenz ergibt sich jedoch nur eine endliche Auflösung (bzw. auf Grund des endlichen Öffnungsdurchmessers der Linse ergibt sich Beugung) und somit ein “verwaschener” Punkt. Die Helligkeitsverteilung dieses verwaschenen Punktes ist durch die PSF gegeben (siehe Anhang C.5).

3.4 Fourieroptik

Im Folgenden wollen wir die bisherige, mehr phänomenologische Sichtweise verlassen und uns in eine fortführende, weit verbreitete Terminologie einarbeiten, die es uns erlaubt, ein weitaus tieferes Verständnis für den optischen Abbildungs- und Bildverarbeitungsprozeß zu erlangen.

3.4.1 Die Grundlagen

Nach dem *Theorem von Fourier* lassen sich periodische Funktionen, und damit die mathematische Beschreibung von periodischen Objekten, stets in eine Reihe harmonischer Funktionen zerlegen, in die sogenannte *Fourierreihe*. Durch diese Entwicklung wird eine periodische Struktur mit der Periode a automatisch in ihren „Ortsfrequenzbestandteilen" $\pm n/a$ ($n \in N_o$) dargestellt, wobei n als Ordnung des Entwicklungsgliedes bezeichnet wird. Um auch ganz allgemeine Strukturen mittels Raumfrequenzen darstellen zu können, verwendet man die sogenannte *Fouriertransformation*, die als Ergebnis des Grenzüberganges aus den Fourierreihen eine integrale Form hat und damit kontinuierlich ist (siehe Anhang C.2). Wie bereits in Kapitel 3.2 gezeigt wurde, ist das Beugungsbild, das in der Brennebene eines abbildenden Systems ensteht die Fouriertransformierte der Blendenöffnungsfunktion. Aus diesem Grund wird die Ebene des Beugungsbildes auch als *Fourierebene* bezeichnet.

3.4.2 Fourieroptik und Beugung

Um den Zusammenhang zwischen den mathematischen Hilfsmitteln der Fouriertransformation und der grundlegenden Physik zu demonstrieren, werde als grundlegendes Beispiel der Zusammenhang zwischen Fraunhoferscher Beugung und der Entwicklung nach ebenen Wellen untersucht. Damit die Formeln nicht unnötig zu kompliziert werden, betrachten wir nur die x-z-Ebene. Man kann ein elektromagnetisches Feld $A(x,z)$ als Überlagerung ebener Wellen in der folgenden Form darstellen

$$A(x,z) = \int \tilde{A}(k_x)\, e^{i(k_x x + k_z z)}\, dk_x.$$

$\tilde{A}(k_x)$ gewinnt man aus $A(x,0)$ durch inverse Fouriertransformation:

$$\tilde{A}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int A(x,0) e^{-ik_x x}\, dx. \tag{3.4}$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (3.3) ergibt sich folgende Beziehung zwischen der Ortsfrequenz R_j und dem Wellenvektor k_j:

$$k_j = 2\pi \frac{j}{\lambda f} = 2\pi R_j \qquad\qquad j = X, Y \tag{3.5}$$

Weiter gilt für den Beugungswinkel $\Theta = \frac{k_x \lambda}{2\pi}$. Das heißt, die Welle mit der Komponente k_x des Wellenvektors wird in der Brennebene der Linse an den Ort

$$X = \Theta f = \frac{k_x \lambda f}{2\pi}$$

fokussiert. Damit folgt

$$k_x = 2\pi \frac{X}{\lambda f}.$$

Wird das in Gl. (3.4) eingesetzt, so ergibt sich sofort das Fraunhofersche Beugungsintegral.

Berücksichtigt man die Ergebnisse der mathematischen Behandlung der Fouriertransformation und die Gl. (3.3), so erkennt man, dass *in der Fourieroptik nach ebenen Wellen entwickelt wird*. Insbesondere werden damit ebene Wellen auf einen Punkt abgebildet und umgekehrt. In diesem Zusammenhang spielen die Gl. (C.11) und (C.13) aus dem Anhang C.2 eine wichtige Rolle.

3.4.3 Optische Übertragungsfunktion

Für die Bildentstehung entscheidend ist welche Bildfrequenzen durch das optische System in die Abbildung übertragen werden. Dazu wird die sog. *optische Übertragungsfunktion OTF* verwendet. Sie gibt an in welchem Umfang eine bestimmte Bildfrequenz im abbildenden System weitergegeben wird. Im Fourierraum ergibt sich somit aus dem Produkt des fouriertransformierten Objekts $\tilde{\tau}(X, Y)$ (d.h. der fouriertransformierten Blendenöffnungsfunktion $\tau(x, y)$) und der OTF die fouriertransformierte Abbildung $\tilde{A}(X, Y)$. Mathematisch wird dies folgendermaßen ausgedrückt:

$$\tilde{A}(X, Y) = \tilde{\tau}(X, Y) \cdot OTF(X, Y). \tag{3.6}$$

3.4.4 Faltungstheorem und Beugung

Ein gutes Beispiel für die Anwendung des Faltungssatzes in der Fourieroptik ist die Beugung an Mehrfachspalten.

Beugung am Doppelspalt: Zunächst wird auf den Faltungssatz in Gl. C.13 hingewiesen (siehe Anhang C.2), der besagt, dass die Fouriertransformierte einer Faltung einer Funktion mit einer anderen dem Produkt der Fouriertransformierten der beiden Funktionen entspricht:

$$h(x) = f(x) \star g(x) \quad \rightarrow \quad \tilde{h}(R) = \tilde{f}(R)\ \tilde{g}(R)$$

wobei für den „Wellenvektor“ k die Raumfrequenz R gesetzt wurde, deren Zusammenhang oben erklärt wurde (siehe Gl. 3.5). Das Symbol $\star$ steht für die mathematische Operation *Faltung*, das Symbol $\rightarrow$ für eine Fouriertransformation.
Am Beispiel des Doppelspaltes ist in Abbildung 3.4 die Darstellung einer optischen Struktur sowie ihres Beugungsbildes als Ergebnis einer Faltung angeführt. Die Blendenöffnungsfunktion eines Doppelspaltes kann als Faltung einer Einfachspaltöffnungsfunktion (Rechteckfunktion) mit zwei δ-Funktionen an den Positionen der Spaltmitten beschrieben werden (linke Spalte in Abb. 3.4). Die Beugungsmuster bzw. die Fouriertransformierten der einzelnen Funktionen sind bekannt. Nach dem Faltungstheorem ist nun das Gesamtbeugungsbild das Produkt der einzelnen Fouriertransformierten: d.h. das Produkt einer sinc- mit einer cosinus-Funktion.

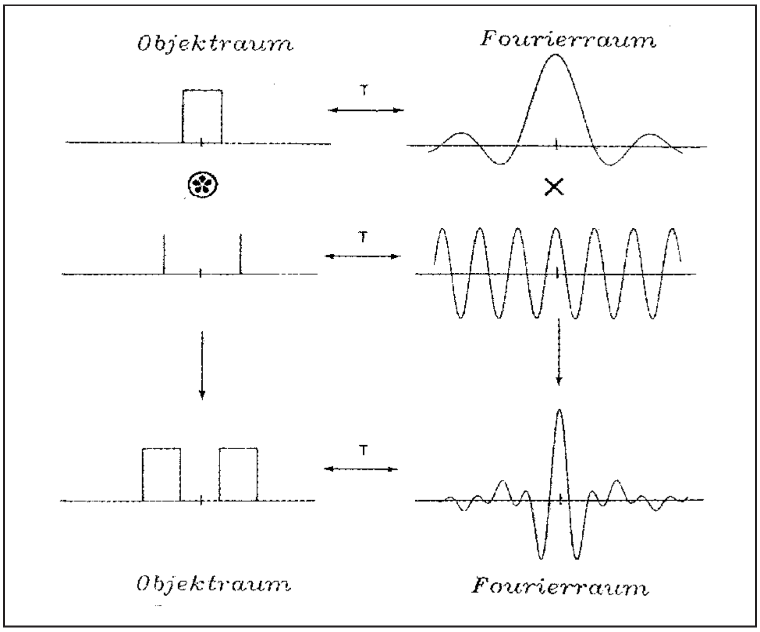

Abbildung 3.4: Beugung am Doppelspalt: Ein Beispiel für das Faltungstheorem.

Beugung am Gitter: Dieses Prinzip lässt sich auf die Beugung am Gitter verallgemeinern. Der Grundprozess ist hier die Beugung am idealen Gitter, mathematisch repräsentiert durch einen Dirac-Kamm. Als Beugungsbild ergibt sich wieder ein Dirac-Kamm, d.h. eine äquidistante Folge gleich hoher unendlich scharfer Maxima. Physikalisch bedeutet das die Zerlegung der auf das Gitter einfallenden ebenen Welle in eine unendliche Folge ebener Wellen mit verschiedenen Richtungen. An Hand dieses idealen Gitters kann man auf mehrere Arten ein reales Gitter diskutieren.

1. Zunächst werden Spalte endlicher Breite eingeführt. Mathematisch bedeutet das eine **Faltung** des Dirac-Kamms mit einer rect-Funktion. Für das Beugungsbild ergibt sich daraus ein **Produkt** aus einer Kosinusfunktion und einer sinc-Funktion, dem Beugungsbild des Einzelspaltes. Damit haben wir die bekannte Regel erhalten, dass im Beugungsbild des Gitters das Beugungsbild des einzelnen Gitterspaltes als Einhüllende auftritt.

2. Jetzt werde ein Gitter endlicher Länge betrachtet. Mathematisch wird es als ein **Produkt** aus einem Dirac-Kamm und einer rect-Funktion dargestellt. Im Fourierraum und damit dem Beugungsbild ergibt sich daraus die **Faltung** einer Kosinusfunktion mit einer sinc-Funktion.
   Physikalisch lässt sich das mit der Beugung der einzelnen vom Gitter erzeugten ebenen Wellen an den Rändern des Gitters deuten. Für eine erste Näherung genügt es, diese Beugungsbilder in der Nähe der jeweiligen Beugungsordnung zu betrachten. Der Abstand der Nebenmaxima ergibt sich daraus in Übereinstimmung mit den in den Lehrbüchern angegebenen Formeln. In der Regel folgt daraus die korrekte Anzahl der Nebenmaxima: n-2.

3. Einen interessanten Aspekt der vorigen Überlegungen gewinnt man, wenn man die Begrenzung des Gitters durch einen Spalt, oder allgemeiner durch eine Blende realisiert und diese dann verschiebt. Dadurch ergibt sich bei den an den einzelnen Beugungsordnungen angeordneten Beugungsbildern ein linearer mit der Verschiebung zunehmender Phasengang. Bei Überlagerung der zu den verschiedenen Beugungsordnungen gehörenden Beugungsbildern kommt es zu konstruktiven und destruktiven Interferenzen. Diese kann man bei Verschieben einer kleinen Kreisblende über ein Gitter über das Beugungsbild wandern sehen.

3.5 Die Bildentstehung

Das optische System

Im folgenden sei das optische System *linear*: Unter dem Gesichtspunkt, dass ein System ein Eingangssignal in ein Ausgangssignal verarbeitet, ist dieses genau dann linear, wenn seine Antwort auf eine Anzahl von Eingangssignalen die Summe der Ausgangssignale ist, die man erhalten hätte, wenn man jeden Input einzeln angelegt hätte. Weiter sei das System *rauminvariant* oder *stationär*, d.h. es wandelt Ortsverschiebungen des Eingangssignals lediglich in Ortsverschiebungen des Outputs um, ohne dabei dessen funktionale Form zu verändern. Außerdem sei das System *aberrationsfrei.*

In den Kapiteln 3.2 und 3.3 war gezeigt worden, dass bei der Abbildung eines Objekts durch ein optisches System zwei entscheidende Prozesse auftreten:

- **Beugung am Objekt**
  Durch Beugung am Objekt entsteht in der Fourierebene des optischen Systems die Fouriertransformierte des Objekts.

- **Beugung am optischen System**
  Durch die begrenzte Appertur des optischen Systems können nicht alle Raumfrequenzen zur Abbildung beitragen, es kommt zu einer "Unschärfe" in der Abbildung.

Beide Prozesse sind für die Bildentstehung entscheidend und bestimmen die Qualität des Bildes. Zur mathematischen Beschreibung der Bildentstehung gib es zwei verschiedene Ansätze:

Beschreibung im Objektraum

Bei der Beschreibung im Objektraum betrachtet man wie einzelne Bildpunkte aus der Objektebene in die Bildebene abgebildet werden, die gesamte Optik wird als eine Art Blackbox betrachtet. Als mathematisches Werkzeug verwendet man dazu die *Punktverwaschungsfunktion* (PSF). Die Abbildung ergibt sich als Faltungsintegral der Objektintensität mit der PSF. Die PSF beschreibt wie ein punktförmiges Objekt im Unendlichen in die Brennebene der Linse abgebildet wird, d.h. sie gibt die Intensitätsverteilung eines Punktes im Unendlichen in der Brennebene der Linse an. Die PSF ergibt sich aus dem Betragsquadrat der Fouriertransformation einer punktförmigen Helligkeitsverteilung (Herleitung siehe Anhang C.5). Die PSF ist i.a. eine Funktion des Ortes im Objektraum, so ist z.B. die Bildqualität in der Nähe der optischen Achse meist besser als an den Randbereichen einer Optik. Die ortsabhängige PSF beschreibt deshalb sehr gut die Qualität eines optischen Systems. Ist die PSF unabhängig vom Ort, so spricht man von einem *räumlich invarianten* oder auch *stationären System*. Mathematisch läßt sich eine Abbildung mit Hilfe der PSF beschreiben durch eine Faltung der Objektintentsität mit der PSF:

$$(Bild) = (Objekt) * (PSF) \tag{3.7}$$

Beschreibung im Fourierraum

Man kann zur Bildentstehung auch die Beugungsstruktur des Fourierraumes verwenden, denn das Bild entsteht ja aus konstruktiver Interferenz der Beugungsmuster des Fourierraumes im Bildraum. Für die Abbildung wird hier die *optische Übertragungsfunktion* (OTF) verwendet, die angibt in wieweit einzelne Frequenzen des Objekts in das Bild "übertragen" werden. Somit entsteht durch Multiplikation des Frequenzspektrums des Objekts aus dem Fourierraum mit der optischen Übertragungsfunktion die fouriertransformierte Abbildung. Dieser Tatbestand lässt sich mathematisch wie folgt formulieren:

$$\mathcal{F}(Bild) = \mathcal{F}\{(Objekt)\} \cdot (OTF)\} \tag{3.8}$$

wobei $\mathcal{F}\{..\}$ die Fouriertransformation bedeutet. (vgl. Gl. 3.6).

In diesem Bild lässt sich der Abbildungsprozess als zweistufiger Prozess beschreiben: zuerst entsteht die Fouriertransformierte des Objekts in der Fourierebene (d.h. das Objekt wird in seine Raumfrequenzanteile zerlegt), im zweiten Schritt rekombinieren die Raumfrequenzanteile in der Bildebene zum fouriertransformierten Bild. Durch Verändern der Fouriertransformierten des Objekts in der Fourierebene lässt sich das Bild beeinflussen, was *räumliche Filterung* oder *Ortsfrequenzfilterung* genannt wird.

Zusammenhang der beiden Modelle

Ein Vergleich von Gl. 3.7 und Gl. 3.8 zeigt, dass sich die OTF aus der Fouriertransformation der PSF ergibt:

$$(OTF) = \mathcal{F}\{(PSF)\} \tag{3.9}$$

Die PSF wird im Ortsraum verwendet, die OTF im Frequenzraum. Abb. 3.5 gibt einen Überblick über die Beschreibung im Objekt- und Fourierraum und zeigt die Verbindungen für den eindimensionalen Fall.

Die Faltung der Objektintensität mit der PSF ergibt die Bildintensität. Im Fourierraum hingegen ergibt die Multiplikation des Frequenzspektrums mit der OTF die fouriertransformierte Bildintensität.

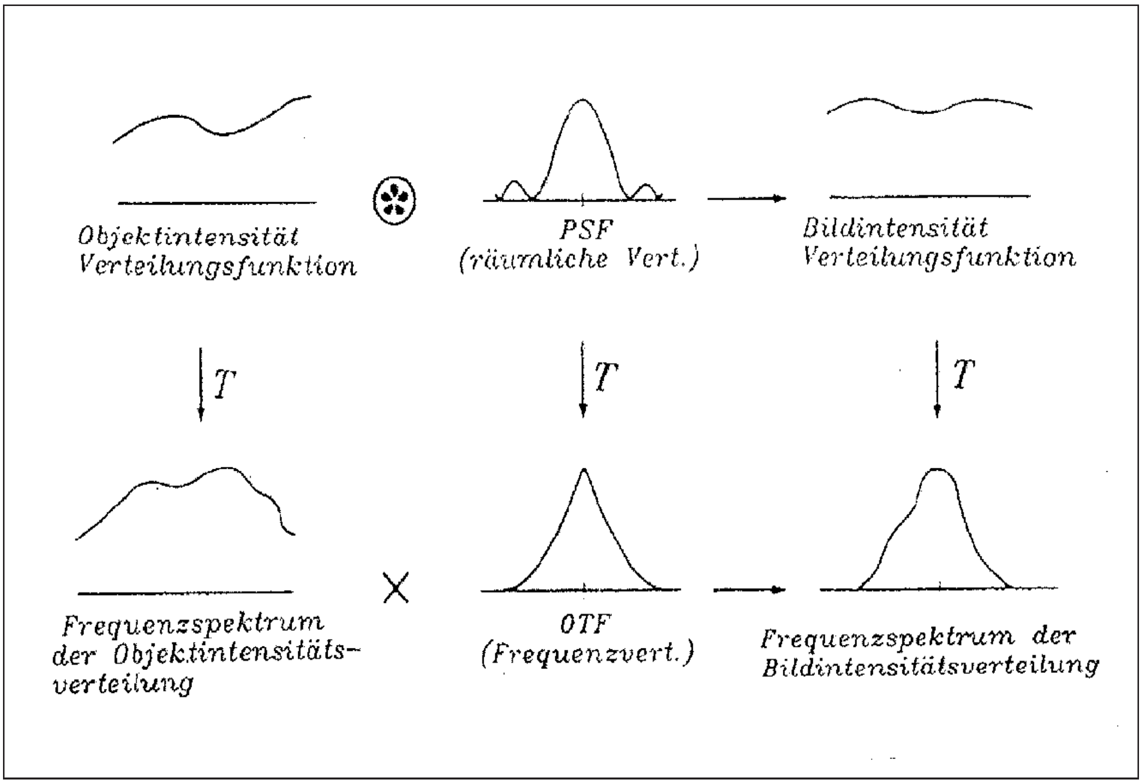

Abbildung 3.5: **PSF** und **OTF** im Zusammenhang

Die OTF ist nicht frequenzabhängig, das bedeutet, dass jede harmonische Komponente der Objektverteilung in das Bild "übertragen" wird, ohne dass sich ihre Frequenz ändert. Nur Intensität und Phase können durch das System beeinflußt werden. Die OTF muss somit zwei Anteile enthalten, einen der Veränderungen in der Intensität beschreibt, sowie einen zweiten, der für die Phasenänderungen zuständig ist. Die Veränderung der Intensität im Bild wird durch einen reelen Intensitäts-Faktor, durch die *Modulationsübertragungsfunktion* **MTF** (für modulation transfer function) angegeben. Analog werden alle – wieder frequenzabhängigen – Phasenänderungen durch einen komplexen Phasenfaktor, der *Phasenübertragungsfunktion* **PTF** (für phase transfer function) wiedergegeben, so dass man die OTF auch folgendermaßen darstellen kann:

$$(OTF) = (MTF) \cdot e^{i(PTF)} \tag{3.10}$$

Die Modulationsübertragungsfunktion ist das Verhältnis der Modulation von Bild zu Objekt, wobei die Modulation (auch Kontrast genannt) definiert ist als:

$$M := \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{3.11}$$

3.6 Die Intensität bei kohärenter Beleuchtung

Bei der Beschreibung mit der PSF gelten die bisherigen Überlegungen für die Lichterregung. Im Bild beobachtet man aber Intensitäten. Welche Komplikationen ergeben sich durch diese Tatsache? Zunächst ist sicher, dass dadurch die Linearität des Übertragungsprozesses zerstört wird. Für Objekte mit kleinen Kontrasten lässt sich aber eine lineare Näherung gewinnen. Während die Beschreibung mit der PSF nur eine Abbildung von Amplitudenobjekten zu beschreiben gestattet, erlaubt die Beschreibung in der Fourierebene auch eine Behandlung von Phasenobjekten. Es ergibt sich, dass der Amplitudenanteil eines Objektes mit dem Realteil der PSF und der Phasenanteil mit dem Imaginärteil der PSF für die Abbildung zu falten ist. Unter bestimmten Bedingungen gewinnt man weiter das Spektrum des Bildes vom Amplituden- bzw. Phasenanteil des Bildes durch Multiplikation mit der entsprechenden Größe des Objektes mit dem Real- bzw. Imaginärteil der OTF. Diese Tatsachen sollen im folgenden bewiesen werden.

3.6.1 Darstellung im Ortsraum*

Für Objekte mit kleinem Kontrast gilt:

$$A(x) = A_0 + A_k(x) \tag{3.12}$$

Darin ist A_0 ein starker, konstanter Untergrund und $A_k(x)$ ein kleiner, ortsabhängiger Kontrastanteil.
Das Bild ergibt sich zu:

$$A'(x') = A_0 + A_k(x') * d(x'), \tag{3.13}$$

wobei $d(x')$ die PSF ist. In Intensitäten ausgedrückt ergibt sich:

$$\begin{aligned} I'(x') &= A_0^2 + A_0 A_k(x') * d(x') + A_0 A_k^*(x') * d^*(x') && (3.14)\\ &= A_0^2 + A_0 \Re(A_k(x') * d(x')). && (3.15) \end{aligned}$$

Jetzt werde mit

$$A_k(x) = A_A(x) + iA_P(x)$$

der Realteil $A_A(x)$ und der Imaginärteil $A_P(x)$ eingeführt. Physikalisch entspricht dem eine Zerlegung in ein Amplituden- und in ein Phasenobjekt. Entsprechend wird $d(x') = d_R(x') + id_I(x')$ aufgespaltet. Damit folgt:

$$\begin{aligned} A'_k(x') &= A_a(x') * (d_R(x') + id_I(x') + iA_P(x') * (d_R(x') + id_I(x')) \\ &= A_A(x') * d_R(x') - A_P(x') * d_I(x') + i(A_A(x') * d_I(x) + A_P(x') * d_R(x')) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Intensität benötigt mn davon den Realteil und findet damit:

$$I'(x') = A_0^2 + 2\,A_0(A_A(x') * d_R(x') - A_P(x') * d_I(x')) \tag{3.16}$$

Das lässt sich wie folgt interpretieren: Im Bild überlagern sich Beiträge, die von Amplitude- und solche die vom Phasenanteil des Objektes herrühren. Dazu wird der Amplitudenanteil mit dem Realteil, der Phasenanteil mit dem Imaginärteil des Punktbildes gefaltet. Diese einleuchtende Regel gilt unter bestimmten Voraussetzungen auch für die Übertragungsfunktionen. Im allgemeinen Fall ist die Situation dort komplizierter.

3.6.2 Darstellung im Frequenzraum*

Um die Situation im Frequenzraum analysieren, werden der Real- und der Imaginärteil der OTF $\tilde{d}$ in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Anteil zerlegt entsprechend:

$$\tilde{d}(k) = \tilde{d}_{RS}(k) + \tilde{d}_{RA}(k) + i(\tilde{d}_{IS}(k) + \tilde{d}_{IA}(k).$$

Für das folgende ist zu beachten, dass die Fouriertransformierte einer symmetischen Funktion eine reine Cosinustransformation, die einer antimetrischen eine reine Sinustransformation ist. Damit ergiebt sich:

$$\begin{aligned} d(x') &= \int \tilde{d}_{RS}(k)\cos(kx')\,dk + i\int \tilde{d}_{RA}(k)\sin(kx')\,dk \\ &\quad + i(\int \tilde{d}_{IS}(k)\cos(kx')\,dk + i\int \tilde{d}_{IA}(k)\sin(kx')\,dk). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Also gilt:

$$d_R(x') = \int \tilde{d}_{RS}(k)\cos(kx')\,dk - \int \tilde{d}_{IA}(k)\sin(kx')\,dk \tag{3.18}$$

$$d_I(x') = \int \tilde{d}_{IS}(k)\cos(kx')\,dk + \int \tilde{d}_{RA}(k)\sin(kx')\,dk. \tag{3.19}$$

Für symmetrische OTF (Defokussierung, reine sphärische Aberration, aber kein Koma) ist jeweils nur der erste Term relevant. Bezüglich der Wirkung auf Amplituden- und Phasenanteil des Objektes gelten also dieselben Regeln wie für die Punktbilder. Im Falle einer allgemeineren Symmetrie werden auch die zweiten Terme wichtig.

3.7 Die Sliding-Window-Transformation

Die bisher dargestellte Art der optischen Filterung schneidet aus dem Ortsfrequenzspektrum bestimmte Frequenzbereiche heraus und untersucht anschließend, wie sich das auf das Bild auswirkt. Man kann aber auch umgekehrt fragen: Welche Beiträge zum Ortsfrequenzspektrum rühren von der unmittelbaren Umgebung eines bestimmten Objektpunktes her? Dazu schneidet man mit einem geeigneten Fenster eine Umgebung des zu betrachtenden Objektpunktes heraus und fouriertransformiert diesen Bereich. So erhält man ein lokales Ortsfrequenzspektrum. Man spricht von einem Sliding-Window-Verfahren. Obwohl ein direkter Zusammenhang zu unseren Experimenten fehlt, sei erwähnt, dass dies ist eine bewährte Methode zur Zeitreihenanalyse ist.

3.8 Zusammenfassung

- Sowohl Beugungs- als auch Abbildungsphenomene lassen sich mit Hilfe der Fourieroptik beschreiben.
- Fraunhofersche Beugung ist gleichbedeutend mit Zerlegung eines Wellenfeldes in ebene Wellen.
- Die Einhüllende und die Nebenmaxima der Ordnungen bei der Beugung am Gitter lassen sich mit dem Faltungssatz ableiten.
- Abbildungsphänomene lassen sich auf zwei Arten beschreiben:
  1. als Aufeinanderfolge zweier Beugungs- bzw. Interferenzprozesse.
  2. als Überlagerung von Beugungsscheibchen
- Die erste Methode eignet sich bevorzugt für die Behandlung der Abbildung kohärent beleuchteter Objekte, die zweite ist für inkohärent beleuchtete Objekte besser geeignet.
- Bei kohärenter Beleuchtung überlagern sich die Lichterregungen, bei inkohärenter Beleuchtung die Intensitäten linear.
- Für Objekte mit kleinem Kontrast lässt sich auch bei kohärenter Beleuchtung eine lineare Übertragungstheorie für die Intensitäten gewinnen.
- Bei kohärenter Beleuchtung werden Amplituden- und Phasenobjekte unabhängig übertragen und man kann für sie jeweils eigene Punktverwaschungsfunktionen angeben. Diese können komplexwertig sein.
- Bei symmetrischen Punktverwaschungsfunktionen gibt es für Amplituden- und Phasenobjekte getrennte Übertragungsfunktionen, die Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Übertragungsfunktion sind.

4 Spezielle Eingriffe

Im folgenden Kapitel sollen zwei spezielle Eingriffe, die Foucaultsche Schneide und die Defokussierung diskutiert werden. Die Foucaultsche Schneide ist ein reeller, antisymmetrischer Eingriff. Die Defokussierung ist ein symmetrischer Eingriff in die Phase. Es werden die jeweiligen Übertragungsfunktionen berechnet und ihre Auswirkungen auf die Abbildung eines Rastersterns diskutiert. Die Eigenschaften des Rastersterns werden mit Hilfe der Sliding-Window-Transformation untersucht.

4.1 Spezielle Eingriffe und ihre Übertragungsfunktionen

4.1.1 Die Foucaultsche Schneide

Die Foucaultsche Schneide ist ein Eingriff, bei dem die eine Hälfte der Frequenzebene abgedeckt und die Ortsfrequenz 0 durchgelassen wird. Sie ist die Basis der sogenannten Schlierenverfahren zur Darstellung von Phasenobjekten.
Der Eingriff ist rein reel. Ist spielt der erste Term von (3.18) und der zweite von (3.19) eine Rolle. Daraus folgt auch, dass der symmetrische Anteil der OTF für die Darstellung von Amplituden-, der antisymmetrische von Phasenobjekten relevant ist. Der symmetrische Anteil ist eine Konstante mit dem Wert $1/2$. Amplitudenobjekte werden mit unveränderter Schärfe aber mit halbem Kontrast dargestellt. Der antisymmetrische Anteil ist eine Sprungfunktion. Ihr Betrag ist wieder $1/2$. Phasenobjekte werden somit sichtbar gemacht. Die Schärfe ist gegenüber einer Darstellung mit echtem Phasenkontrast unverändert, der Kontrast auf die Hälfte herabgesetzt.

4.1.2 Die Defokussierung

Anschauliche Vorüberlegungen: Wenn ausschließlich die Aberrationen für die OTF wichtig sind, handelt es sich um reine Phaseneingriffe. über die in den Formeln (3.18) und (3.19) wichtigen Terme ist damit zunächst noch nichts ausgesagt. Erst wenn man sich auf Defokussierung allein beschränkt folgt, dass der Eingriff symmetrisch, und somit nur der jeweils erste Term wichtig ist.
Um Aberrationen berücksichtigen zu können, wird eine Kugel um den Objektpunkt eingeführt, die durch den Mittelpunkt der Eintrittspupille geht (siehe Abb. 4.1). Der Abstand dieser Kugel von der wirklichen Wellenfront wird als Wellenaberration bezeichnet.

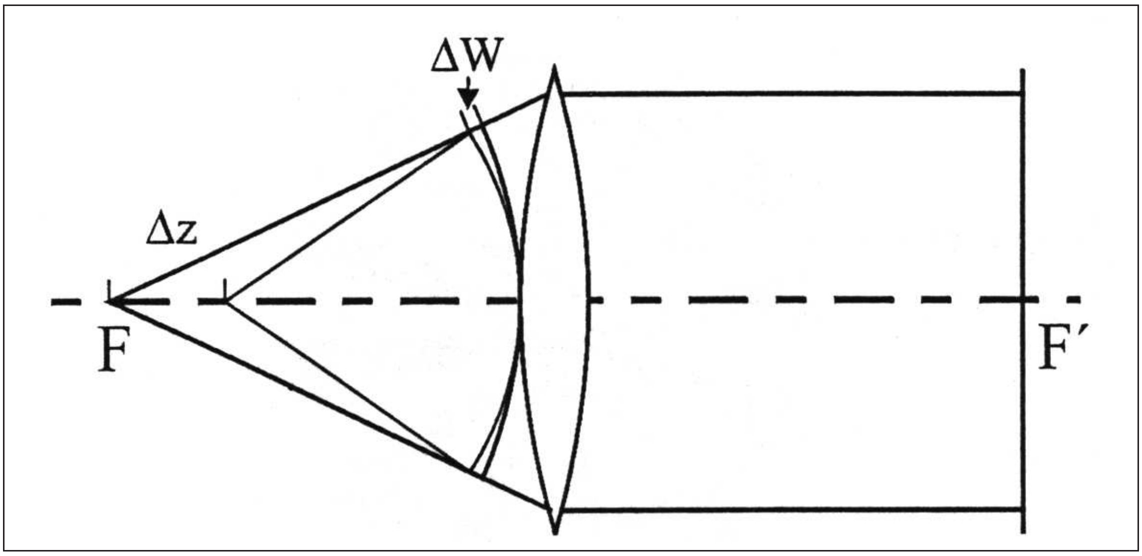

Abbildung 4.1: Die Wellenfront bei Defokussierung

Ableitung der Übertragungsfunktion*: Bei einer 4-f-Anordnung kann man als Mittelpunkt der Eintrittspupille den Mittelpunkt der ersten Linse benutzen. Die ideale Lage für den Objektpunkt ist ihr vorderer Brennpunkt. Die Gaußsche Bezugskugel hat dann den Radius f. Die Wellenfront ist eine Kugel um den um Δz defokussierten Objektpunkt, hat also den Radius $f - \Delta z$. Beide Kugeln werden durch Paraboloide approximiert. Betrachtet man nur die X-Z-Ebene, so erhält man für sie die Gleichungen (an einem Extremum ist die Krümmung identisch mit der zweiten Ableitung):

$$z = \frac{x^2}{2f}, \quad z = \frac{x^2}{2(f - \Delta z)} \approx \frac{x^2\,(1 + \frac{\Delta z}{f})}{2f}$$

Die Wellenaberration ist die Differenz der beiden Ausdrücke und somit

$$\Delta W = \frac{1}{2}\,\Delta z\,\frac{x^2}{f^2}. \tag{4.1}$$

Da die Wege aller Strahlen von der Gaußschen Bezugskugel zur Fourierebene gleich sind, kann man aus ΔW die durch die Defokussierung bewirkte Phasenverschiebung in der Fourierbene berechnen:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\Delta W}{\lambda} = \frac{\pi\Delta z}{\lambda}\,\frac{x^2}{f^2}.$$

Für den Beugungswinkel φ gilt:

$$\varphi = R\lambda = \frac{x}{f},$$

und damit gilt:

$$\Delta\Phi = \pi\Delta z\lambda R^2.$$

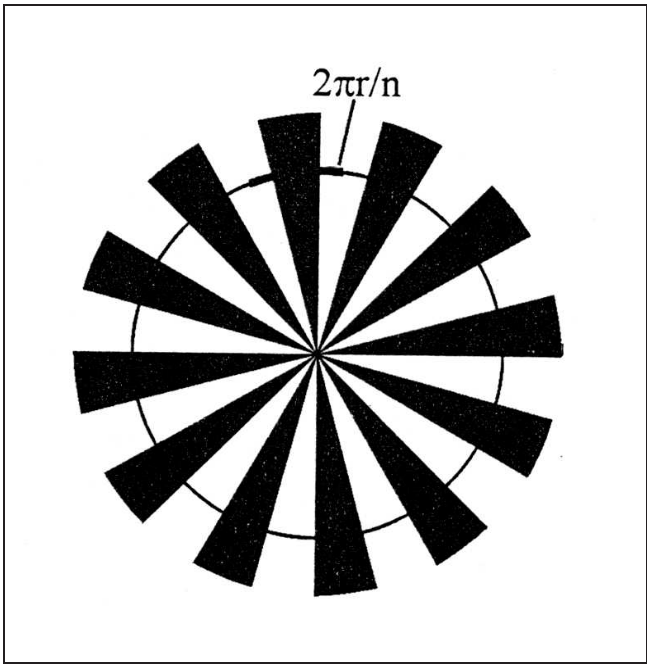

Abbildung 4.2: Der Rasterstern

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion:

$$D(R) = e^{i\,\Delta\Phi} = e^{i\,\pi\Delta z\lambda R^2}. \tag{4.2}$$

Schlußfolgerungen: Dies ist eine symmetrische Übertragungsfunktion. Die Übertragungsfunktionen für Amplituden- und Phasenobjekte sind ihr Real- bzw. ihr Imaginärteil, also:

$$D_A(R) = \cos(\pi\Delta z\lambda R^2) \tag{4.3}$$
$$D_P(R) = \sin(\pi\Delta z\lambda R^2) \tag{4.4}$$

Die beiden Übertragungsfunktionen sind in Abb. 4.5 dargestellt.

4.2 Experimente mit dem Rasterstern

4.2.1 Die Eigenschaften des Rastersterns

Ein Rasterstern besteht aus n abwechselnd hellen und dunklen Sektoren. Diese bilden lokale Gitter. Im Abstand r von der Mitte des Sterns ist ihre Ortsfrequenz (siehe Abb. 4.2):

$$R = \frac{n}{2\pi r} \quad \text{oder} \quad n = 2\pi Rr. \tag{4.5}$$

4.2.2 Rasterstern und Sliding-Window-Methode

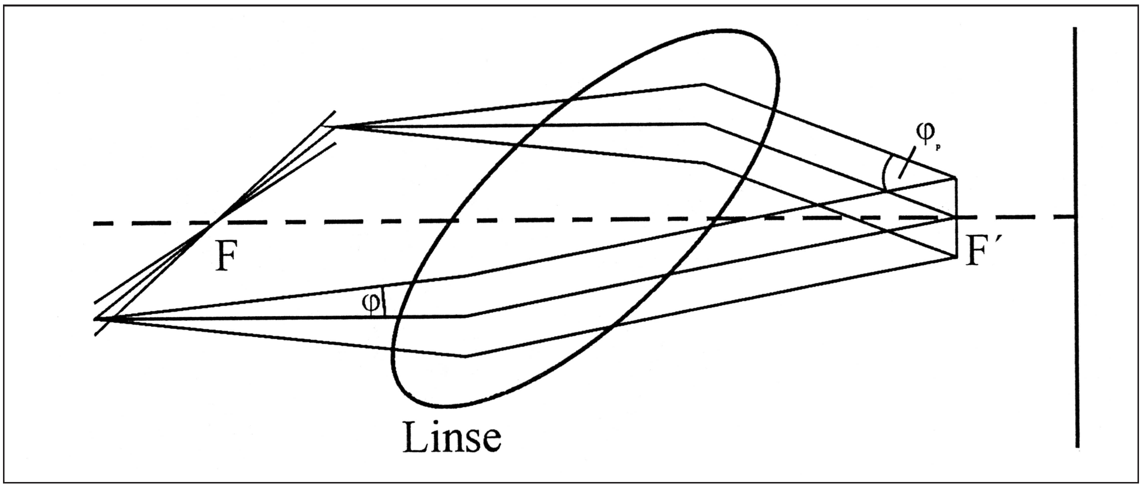

Abbildung 4.3: Beugung am Rasterstern

Aussagen über das Ortsfrequenzspektrum als Ganzes sind durch Anwendung der Sliding-Window-Methode möglich.
Die Anwendung der Sliding-Window-Methode im Experiment erfolgt, indem man das Objekt mit einer kleinen Blende abfährt und das Orstfrequenzspektrum beobachtet. Fährt man mit der Blende entlang eines Radius des Sterns, so beobachtet man ein normales Beugungsspektrum am Gitter (siehe Abb. 4.3). Der Beugungswinkel berechnet sich wie üblich als $R\lambda$, wobei R aus (4.5) einzusetzen ist:

$$\varphi = R\lambda = n\,\frac{\lambda}{2\pi r}. \tag{4.6}$$

Die Lage der zugehörigen ersten Maxima in der Beugungsebene folgen aus:

$$r_p = \varphi\, f = n\,\frac{\lambda f}{2\pi r}. \tag{4.7}$$

4.2.3 Beugung am Rasterstern*

Bei der Beugung am gesamten Rasterstern wirken die beiden lokalen Gitter rechts und links der Sternmitte zusammen. Von ihnen gehen jeweils Bündel aus, die sich in der Beugungsebene mit dem Winkel φ_p überlagern. Das resultierende Interferenzstreifensystem hat die Ortsfrequenz R_p. Es gilt:

$$\varphi_p = \frac{2r}{f} \quad \text{oder} \quad R_p = \frac{\varphi_p}{\lambda} = \frac{2r}{f\lambda}. \tag{4.8}$$

Die Ortsfrequenz R_p ist in sämtlichen, vom lokalen Gitter erzeugten Beugungsmaxima zu beobachten, also auch im Zentrum des Beugungsbildes. Dies kann man durch ein Abdecken des Sterns mit zwei Kreisblenden im Abstand $2r$ verifizieren.

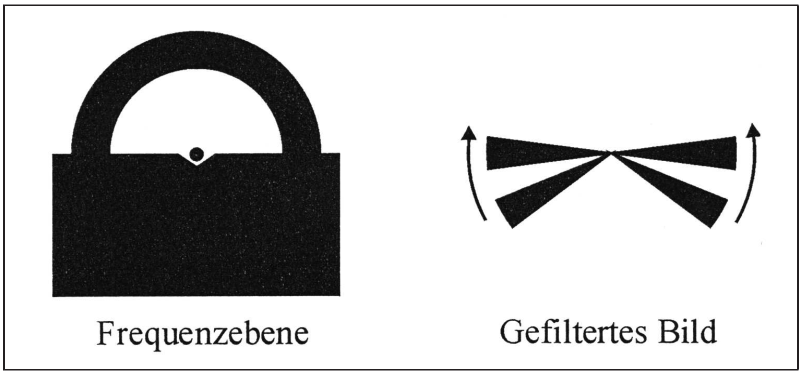

Abbildung 4.4: Stern und Foucault-Schneide

Ersetzt man die beiden Kreisblenden durch einen Ring, so bleiben die Interferenzstreifen erhalten. Lediglich im Zentrum des Sterns überlagern sich Streifen mit verschiedenen Richtungen und werden dadurch verwischt. Bei der ersten Ordnung resultiert so wieder ein Radialgitter mit

$$n_p = 2\pi \, r_p \, R_p = 2\pi n \, \frac{f\lambda}{2\pi r} \, \frac{2r}{f\lambda} = 2n \tag{4.9}$$

Sektoren.
Damit folgt, dass sich bei der Beugung am Rastestern wieder ein Rasterstern ergibt, er hat allerdings die doppelte Sektorenzahl.

4.2.4 Rasterstern und Foucaultsche Schneide

Der Amplitudenstern Bildet der Rasterstern ein reines Amplitudenobjekt, so kann man durch sorgfältiges Justieren erreichen, dass lediglich der Kontrast um den Faktor 2 herabgesetzt wird, sonst aber keine Störungen im Bild zu erkennen sind.

Der Phasenstern Bildet der Stern ein reines Phasenobjekt, so sind im Sliding-Window-Spektrum die höheren Ordnungen gegen die 0-te um 90^o in der Phase verschoben. Wird eine Foucaultsche Schneide angewandt, so sind die lokalen Gitter um 1/4-Periode gegenüber der wirklichen Lage verschoben. Wird die Schneide um 180^o gedreht, so erfolgt die Verschiebung in die entgegengesetzte Richtung. Die Gesamtverschiebung in beiden Experimenten beträgt eine halbe Periode.
Beide lokale Gitter rechts und links der Mitte werden in dieselbe Richtung verschoben. Daraus folgt, dass entlang eines Radius, der senkrecht auf der Schneide steht, eine auch durch sorgfältiges Justieren der Schneide nicht zu beseitigende Störung des Bildes auftritt (siehe Abb. 4.4).

4.2.5 Der defokussierte Rasterstern

Die Phänomenologie: Da in einem Rasterstern verschiedene Ortsfrequenzen in genau angebbaren Bereichen lokalisiert sind, eignet er sich sehr dazu, die Eigenschaften von Übertragungsfunktionen zu demonstrieren. Dies soll am Beispiel des defokussierten Rastersterns gezeigt werden.
Die Übertragungsfunktionen für den defokussierten Amplituden- und Phasenstern sind:

$$\begin{aligned} D_A(R) &= \cos(\pi R^2 \lambda\, \Delta z) \\ D_P(R) &= \sin(\pi R^2 \lambda\, \Delta z) \end{aligned}$$

Beide Funktionen haben Nullstellen (siehe Abb. 4.5), die zu strukturlosen Ringen im

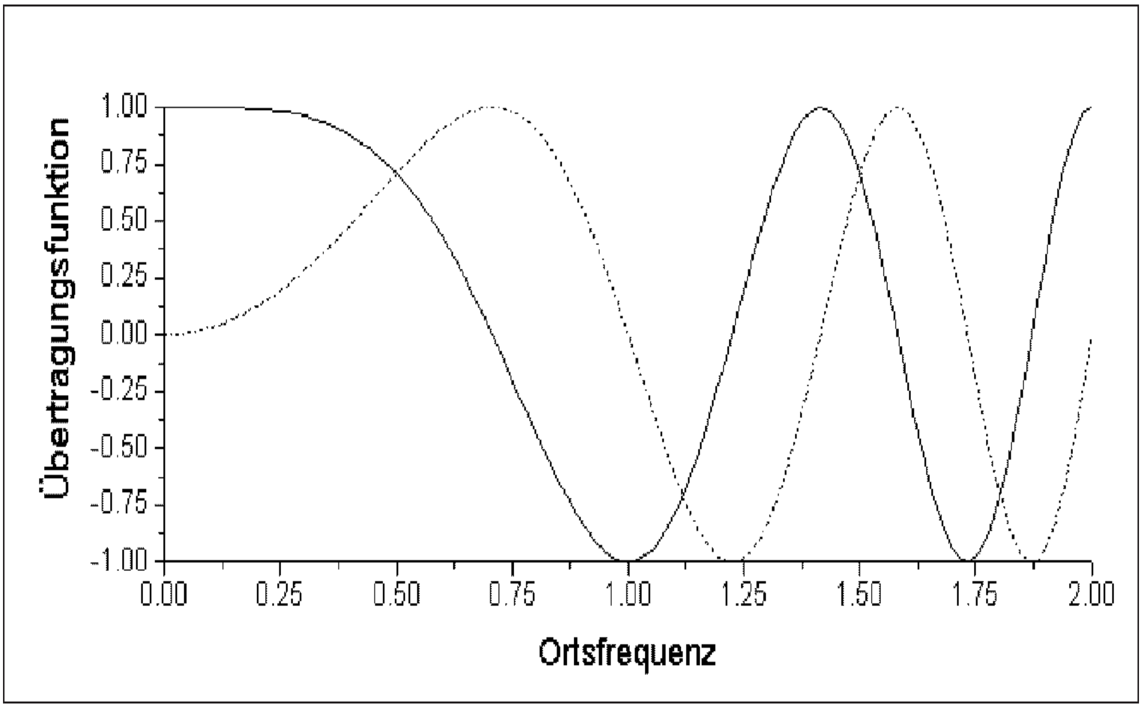

Abbildung 4.5: Übertragungsfunktionen bei Defokussierung.
ausgezogene Linie: Amplitudenobjekt, gestrichelte Linie: Phasenobjekt.

Bild des Sterns führen. Weil die Nullstellen mit einem Vorzeichenwechsel verbunden sind, sind die hellen und dunklen Sektoren innerhalb und außerhalb dieser Ringe vertauscht. Diese Ringe sollen im nächsten Abschnitt näher diskutiert werden.

Die Lage der strukturlosen Ringe* Die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \pi R_{0A}^2 \lambda\, \Delta z &= \pi(j - \tfrac{1}{2}) \quad \text{oder} \quad R_{0A} = \sqrt{\tfrac{j-\frac{1}{2}}{\lambda \Delta z}} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2 \cdots \\ \pi R_{0P}^2 \lambda\, \Delta z &= \pi j \quad \text{oder} \quad R_{0P} = \sqrt{\tfrac{j}{\lambda \Delta z}} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2 \cdots \end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Radien der daraus folgenden strukturlosen Ringe im Bild des Sterns sind:

$$\begin{aligned} r_{0A} &= \frac{n}{2\pi R_{0A}} = \frac{n}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda\Delta z}{j-\frac{1}{2}}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r_{0A}^2} = \frac{4\pi^2}{n^2}\,\frac{j-\frac{1}{2}}{\lambda\Delta z} \\ r_{0P} &= \frac{n}{2\pi R_{0P}} = \frac{n}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda\Delta z}{j}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r_{0A}^2} = \frac{4\pi^2}{n^2}\,\frac{j}{\lambda\Delta z} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Trägt man $1/r_0 2$ über j bzw. $j - \frac{1}{2}$ auf, so erhält man identische Geraden. Die Steigung hängt von λ und Δz ab. Die Werte für den Amplitudenstern liegen bei halbzahligen, die für den Phasenstern bei ganzzahligen Argumenten.
Zwischen den Nullstellen wird der Stern mit großem Kontrast abgebildet. Hat die Übertragungsfunktion an dieser Stelle ein negatives Vorzeichen, so ist der Kontrast umgekehrt. In diesen Fällen spricht man von *Scheinauflösung*.

4.2.6 Foucaultsche Schneide und defokussierter Rasterstern

Das Auftreten der Nullstellen lässt sich physikalisch mit der Interferenz dreier Bündel erklären. Diese gehen von der 0-ten, der positiven und der negativen ersten Ordnung aus. Bei kleinen Kontrasten muss man nur die Interferenzen mit der 0-ten Ordnung berücksichtigen und darf die daraus resultierenden Intensitätten addieren. Haben die beiden Interferenzerscheinungen eine Phasenverschiebung um 180^o, so löschen sich ihre Kontraste gegenseitig aus: Die Übertragungsfunktion hat eine Nullstelle.
Mit einer Foucaultschen Schneide unterdrückt man eine der beiden Interferenzen. Bei der defokussierten Abbildung eines Rastersterns erhält man durch die Phasenverschiebung der verbleibenden Interferenzen gekrümmte Sektoren.

4.3 Zusammenfassung

- Bei einem Rasterstern lassen sich lokale Ortsfrequenzen definieren. Diese lassen sich mit der Sliding-Window-Methode nachweisen.

- Die Beugung am Rasterstern lässt sich mit der Sliding-Window-Methode verstehen.

- Die Foucaultsche Schneide ist ein antisymmetrischer Eingriff, bei dem die Hälfte der Frequenzebene abgedeckt wird. Dadurch wird der Kontrast um den Faktor 1/2 herabgesetzt.

- Bei Amplitudenobjekten werden durch die Foucaultsche Schneide keine Artefakte eingeführt. Bei Phasenobjekten (Phasenstern) kommt es auf einer Linie senkrecht zur Schneide zur Artefaktbildung.

- Defokussierung bewirkt einen reinen Phaseneingriff. Die resultierenden Übertragungsfunktionen haben ausgeprägte Nullstellen. Die Nullstellen für Phasenobjekte liegen zwischen denen für Amplitudenobjekte.

- Die Nullstellen lassen sich durch Dreistrahlinterferenzen erklären. Die verschiedenen Streifensysteme sind in der Phase gegeneinander verschoben.
- Bei der Abbildung von Rastersternen führen die Nullstellen zu kontrastlosen Ringen. Die Ringe mit kleinen Ordnungsnummern der Nullstellen liegen außen, die mit großen innen.

4.4 Inkohärente Beleuchtung

Bisher wurde eine streng kohärente Beleuchtung des Objekts vorausgesetzt. Bei nur teil-kohärenter oder stark inkohärenter Beleuchtung wird das Fraunofer'sche Beugungsbild schlecht aufgelöst sein. Auf Grund der kurzen Kohärenzlänge der Strahlung kann dann oft keine konstruktive Interferenz auftreten. In der Folge wird das Beugungsbild unscharf.

Im inkohärenten Fall sind die Intensitäten der Airy-Muster aller Punkte einfach additiv, im kohärenten Fall gibt es Interferenzen, und man arbeitet mathematisch unter Verwendung komplexwertiger Airy-Muster-Amplituden, die sich dann in einen reellen Amplituden- und einen komplexwertigen Phasenfaktor aufspalten lassen.

4.5 Fragen

- Erklären Sie die Begriffe "Kohärenz", "räumliche Kohärenz", "zeitliche Kohärenz".
- Erklären Sie den Begriff "reziproker Raum".
- Betrachten Sie den reziproken Raum:
  Für welche "Strukturen" stehen Wellenzüge, die sich im reziproken Raum auf der optischen Achse treffen?
- Wie ist die Information über das Bild in der Fourierebene verteilt?
- Das Fraunhofersche Beugungsbild entsteht in der Brennebene der Linse durch Strahlenbündel, die vor der Linse parallel verlaufen. Somit werden in der Brennebene nur parallele Strahlenbündel abgebildet. Zur Bildentstehung in der Bildebene können aber alle Strahlen beitragen, die durch die Linse erfaßt werden. Somit wird nur ein Teil der Bildinformation in der Brennebene abgebildet. Klären Sie diesen Wiederspruch auf!
- Warum ist bei teil- bzw. inkohärenter Strahlung das Fraunhofersche Beugungsbild schlecht aufgelöst?
- Bei welchem optischen Instrument fallen Beugungsebene und Beobachtungsebene zusammen? Welche Konsequenzen entstehen daraus?

Übungen:

1. Leiten Sie aus der Diskussion in Abschnitt 3.4.4 eine Formel für die Beugung am Mehrfachspalt ab. Zeigen Sie, dass sich das Result aus der in den Lehrbüchern angegebenen Formel ergibt.

2. Überlegen Sie, wann Sie den in Abschnitt 3.4.4 diskutierten Effekt einer Blendenverschiebung deutlicher beobachten können, bei einer geraden oder einer ungeraden Zahl von Spalten.

5 Versuchsaufbau

Zu Beginn dieses Abschnittes zeigt Ihnen Abb. 5.1 den kompletten Versuchsaufbaus wie Sie ihn zu Beginn Ihres Praktikums am *Lehrstuhl für BioMolekulare Optik* in der Oettingenstr. 67 Raum DU 09 vorfinden werden. Die Apparatur ist auf einer

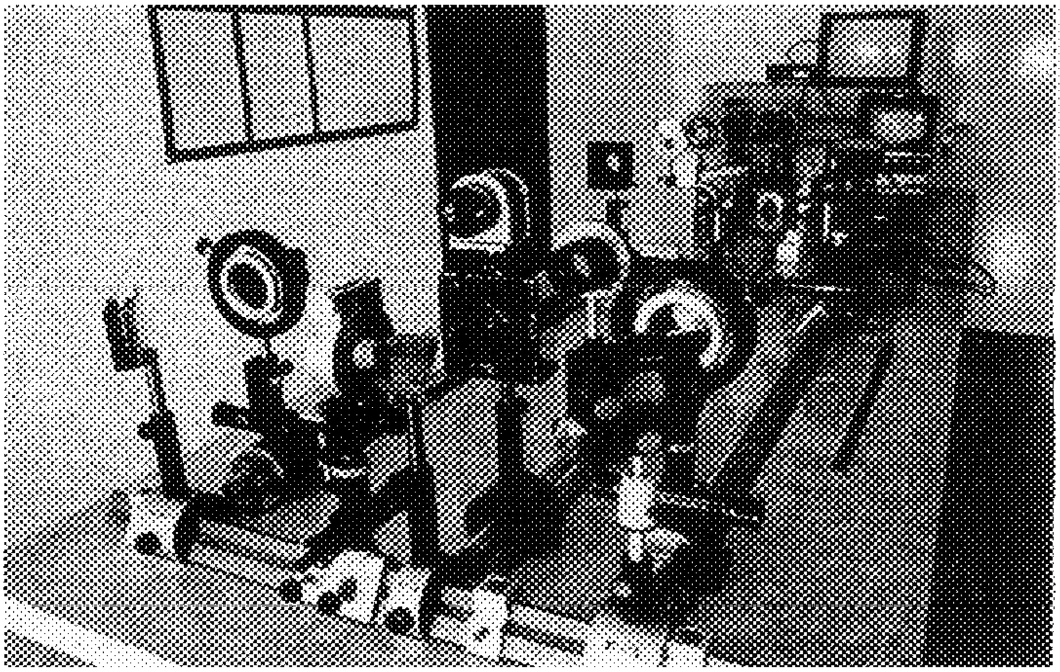

Abbildung 5.1: Die Apparatur

massiven Marmorplatte, die auf drei Styroporblöcken zur Schwingungsdämpfung ruht, aufgebaut. Im folgenden wollen wir uns der Beschreibung dieses optischen Systems widmen.

5.1 Das Prinzip

Wie in Abb. 5.2 schematisch wiedergegeben ist, wird das Licht einer Punktlichtquelle in der Brennebene eines Kollimators Kl zu einem Parallelbündel abgebildet. Diese ebenen Wellen beleuchten nun ein Objekt in der Ebene S_0, der objektseitigen Brennebene einer Linse L_t. Nach der Theorie in Kapitel 3 können wir nun in der bildseitigen Brennebene S_t, die man auch als Fourierebene bezeichnet das

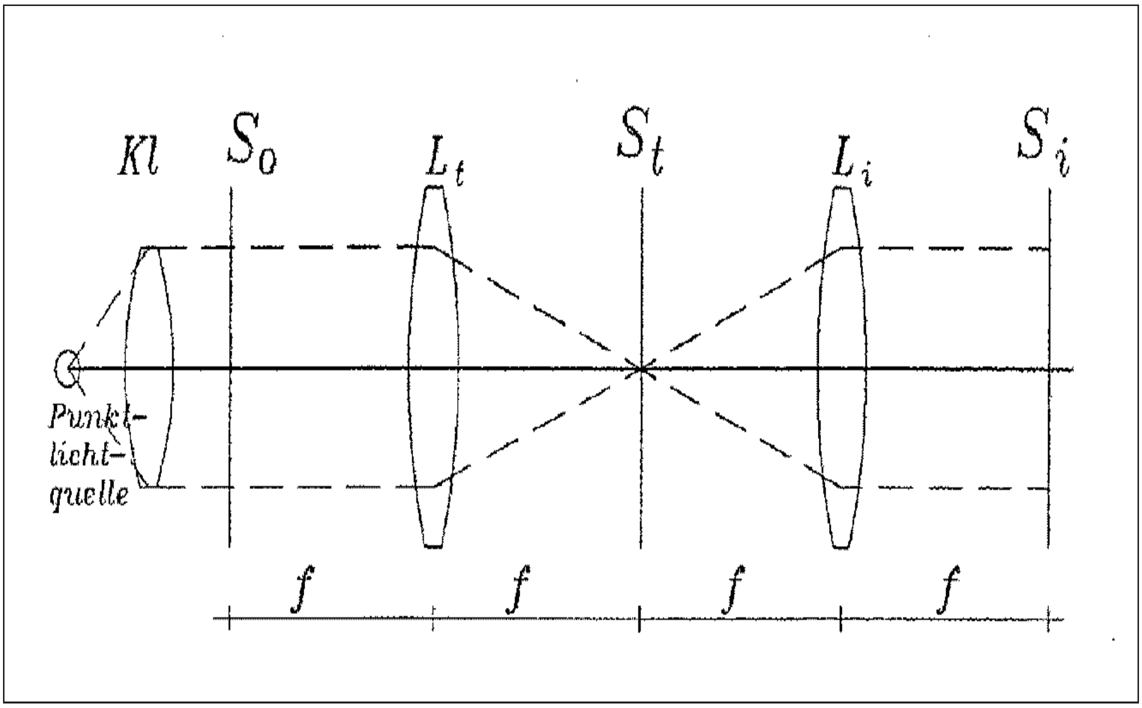

Abbildung 5.2: Der Versuchsaufbau, Schema, 4-f-Set

Fraunhofersche Beugungsmuster dieses Objekts oder die Fouriertransformierte der Blendenöffnungsfunktion beobachten. – Für ein kollimiertes Lichtbündel, also ohne Objekt in S_0, wäre die Fouriertransformierte bei monochromatischer Beleuchtung im Idealfall, d.h. u.a. wenn wir von einer „unendlich dimensionierten“ Linse ausgehen, also eben das „Punktverwaschungsphänomen“ außer Betracht lassen, ein zentraler Punkt. – Nun fällt S_t aber gerade mit der vorderen Brennebene einer weiteren Linse L_t zusammen, welche erneut als „Fouriertransformator“ dient; nur ist jetzt die Lichtverteilung in S_t das Objekt, so dass wir in der bildseitigen Brennebene S_i nach demselben Prinzip wie oben dort die Fouriertransformierte des Beugungsmusters bzw. des „primären Bildes“ sehen können. Insgesamt wird also auf das Eingangssignal zweimal die Fouriertransformation angewandt, so dass man verkürzt schreiben kann

$$\text{Bild in } S_i = T\{T\{\text{Eingangssignal in } S_0\}\}. \tag{5.1}$$

Nun unterscheidet sich die Fouriertransformation von ihrer Inversen im Wesentlichen nur durch das Vorzeichen im Phasenterm, so dass das Endbild unserer Abbildung oder das „sekundäre Bild“ bei einem idealen, fehlerfreien System bis auf Größe und Orientierung – es steht auf dem Kopf! – mit dem Urbild oder Objekt übereinstimmt. – Im Falle unseres Punktes als primäres Bild erhalten wir wieder ein Parallelbündel mit einem durch des Brennweitenverhältnis der Linsen modulierten Durchmesser.– Sind nun auch noch die Brennweiten von L_t und L_i gleich, nämlich f, so entsteht eine symmetrische „*Fouriertransformatoreinheit*“, die die Größe des Bildes nicht beeinflußt.

Eine solche symmetrische „Fouriereinheit“ bildet das Herzstück dieses Versuchsaufbaus. Für die praktische Realisierung mit dem Wunsch, sowohl das primäre als auch das sekundäre Bild beobachten zu können, sind in Anbetracht der Zielsetzung einer Bildverarbeitung noch einige Erweiterungen des Schemas aus Abb. 5.2 nötig.

5.2 Die Optik

In der Realisierung, wie sie in Abb. 5.3 dargestellt ist, wurde eine symmetrische Fouriereinheit in ein System zur Bildverkleinerung und anschließender Bildvergrößerung eingekleidet. Als Lichtquelle dient ein Dauerstrich HeNe-Laser der Leistung $10mW$

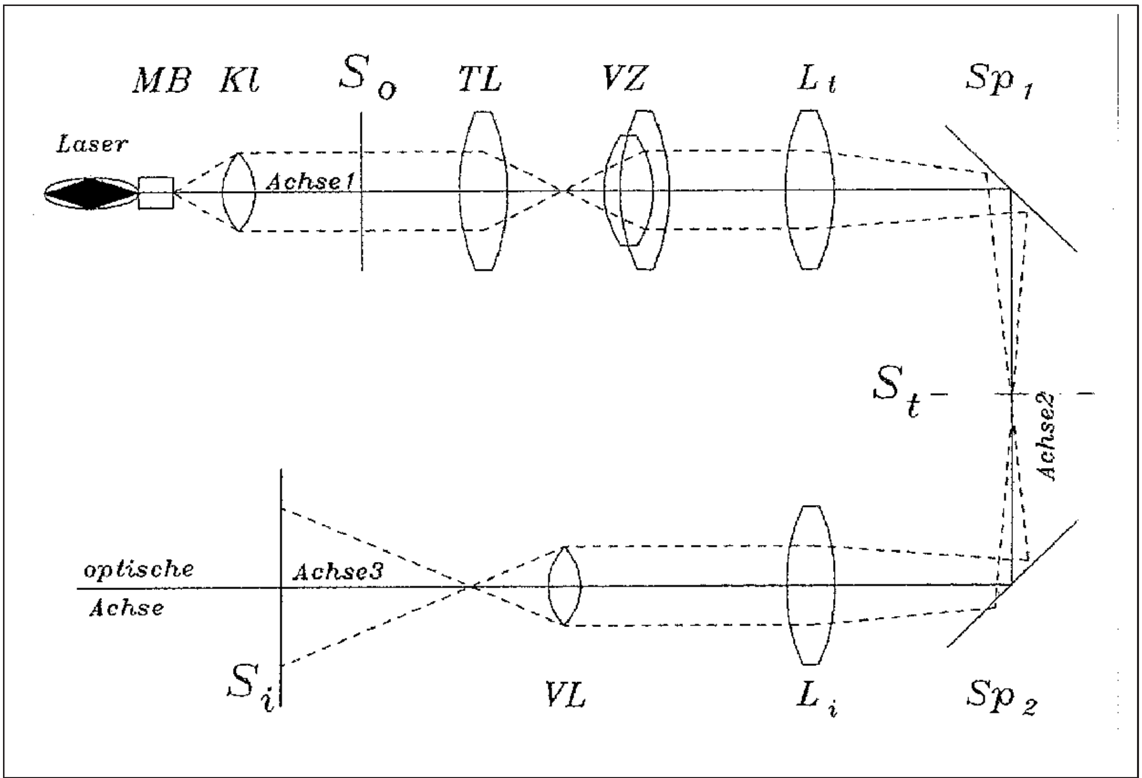

Abbildung 5.3: Prinzipieller Versuchsaufbau.
MB=Modenblende, KL=Kollimator, TL=Epiotar, VZ=Zoom, Sp_1 u. Sp_2 = Spiegel, VL=Photo-Objektiv; übrige Bezeichnungen wie in der vorigen Abbildung.

und einer Wellenlänge von $\lambda = 633nm$. Durch ein Mikroobjektiv, genauer durch ein Raumfilter MB wird einerseits erreicht, dass der Laserstrahl aufgeweitet wird, andererseits die austretende Leistung unter die für einen Praktikumsversuch erforderliche $1mW$- Grenze sinkt. Dadurch sind die an die Kohärenz der Beleuchtungseinheit gestellten Bedingungen erfüllt.
Dieser aufgeweitete Laserstrahl wird nun durch den Kollimator KL zum Parallelstrahl ebener Wellen transformiert. Dieses Lichtbündel durchstrahlt dann die Gegenstandsebene S_0, in der die verschiedenen Objekte in Form von Dias oder Blenden ein-

gebracht werden können und die mit der vorderen Brennebene des Objektives TL („Teleskoplinse“) zusammenfällt. Das $300mm$- Objektiv TL bildet zusammen mit dem Variozoom VZ, das einen Brennweitenbereich von $80mm$ bis $240mm$ besitzt, das „Verkleinerungsteleskop“, das entsprechend dem gewählten Brennweitenverhältnis von VZ zu TL das Bild verkleinert, wobei natürlich wieder die hintere Brennebene von TL mit der vorderen von VZ zusammenfällt. Damit verlässt das Licht dieses Teleskop wieder als Parallelstrahl, ehe es dann die „symmetrische Fouriertransformatoreinheit“ durchstrahlt. Diese besteht aus den Linsen L_t und L_i. So kann genau in der Mitte zwischen L_t und L_i die Fouriertransformierte des verkleinerten Objekts in S_0 beobachtet werden. Dieses ist identisch mit dem vergrößerten Fraunhoferschen Beugungsbild des Objekts in der Ebene S_t. Dieses vergrößerte Beugungsbild würde nun selbstverständlich ein verkleinertes Bild hinter L_i erzeugen, d.h. in dessen hinteren Brennebene. Deshalb wird ein kurzbrennweitiges Objektiv VL („Vergrößerungslinse“) – Brennweite $50mm$ – in den kollimierten Strahl nach L_i zur Nachvergrößerung gestellt. Die Position von VL ist eben so zu wählen, dass das zweimal fouriertransformierte Objekt als Bild in die Optik der CCD-Kamera $Kamera_i$ fokussiert abgebildet wird. Dabei ist die Position abhängig von der gewählten Brennweite von VZ, das bei Variation derselben nicht nur diese sondern auch die Hauptebenen des Zooms verändert. Die Nachvergrößerung des Bildes nimmt mit dem Abstand $VL - S_i$ linear zu.
Um nun die ganze Apparatur, wie eben beschrieben, die eine Länge von sechs Metern erreicht, übersichtlicher und handlicher zu gestalten, wurde die optische Achse U-förmig gewählt und dafür in die Fouriereinheit symmetrisch zu S_t zwischen L_t und L_i zwei Umlenkspiegel Sp1 und Sp2 aufgenommen, wodurch sich die drei Äste der optischen Achse ergeben, wie sie Abb. 5.3 zeigt.

5.3 Die Bildbeobachtung

Offen geblieben ist noch in der Abb. 5.3, wie nun das primäre und sekundäre Bild beobachtet werden können und zwar wenn möglich gleichzeitig, um eben gewisse Abhängigkeiten voneinander deutlich zu erkennen. Eine Mattscheibe in S_t zu stellen, hätte zur Folge, dass zwar das Beugungsmuster des Objektes auf dieser beobachtet werden kann, nicht aber das sekundäre Bild in S_i auf dem dortigen Schirm am Ende der optischen Achse.
Aus diesen Gründen heraus führen wir in der Ebene der Fouriertransformierten einen Strahlteiler ein, der die Hälfte der Lichtintensität auf die zu Achse1 und Achse3 parallelen verlaufende Achse4 leitet (s. Abb. 5.4), wo mit Hilfe des Objektivs ZL_1 mit einer Brennweite von $210mm$ und der Linse ZL_2 mit einer Brennweite $355mm$ nun eine fokussierte Abbildung des Beugungsmusters in S_t auf eine CCD-Kamera ($Kamera_t$) erreicht wird (s. Abb. 5.4). Beide CCD-Kameras ($Kamera_i$ und $Kamera_t$) sind mit einem Zoom-Objektiv ausgerüstet. Am Zoomobjektiv gibt es jeweils drei Stellringe: der Vorderste dient zur Scharfeinstellung, mit dem Mittleren wird der Zoom eingestellt, über den Hinteren die Blendenöffnung. Jede CCD-Kamera

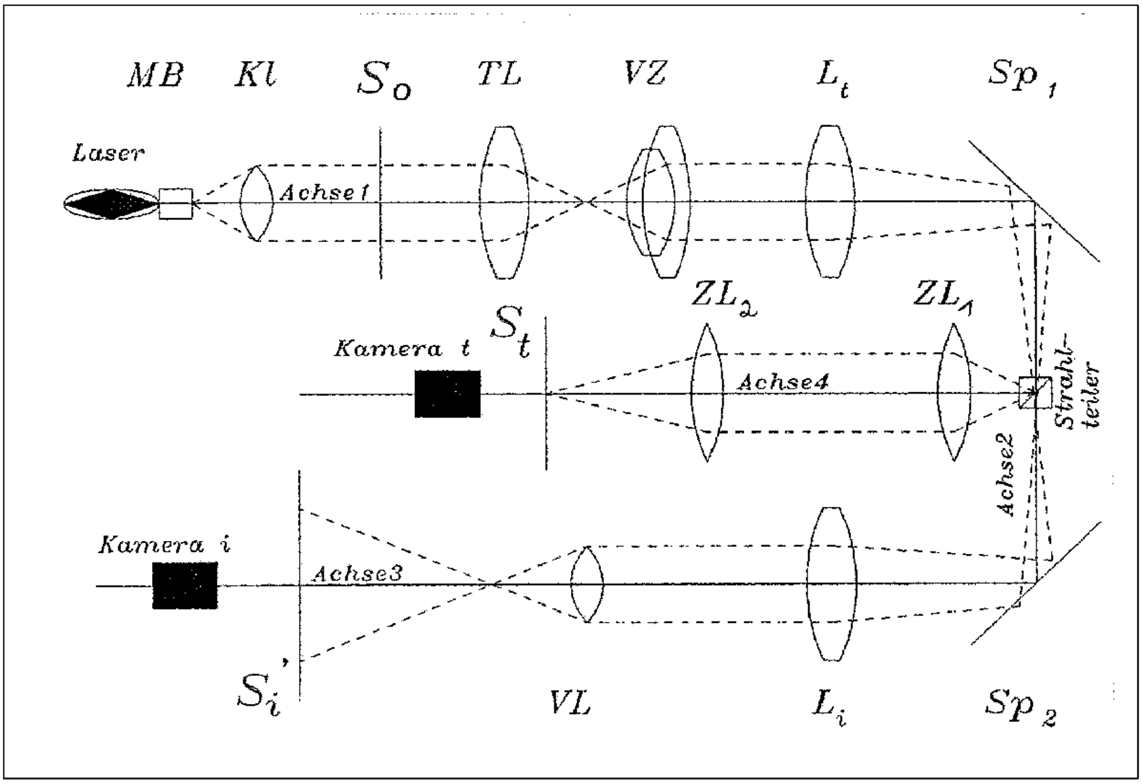

Abbildung 5.4: Der Versuchsaufbau, Realisierung mit Bildbeobachtung. ZL_1 = Objektiv, ZL_2 = Linse. übrige Bezeichnungen wie in beiden vorhergehenden Abbildungen.

ist mit einem Monitor verbunden. Die Bilder beider Kameras können mit einem PC über zwei Videokarten ausgelesen und im JPEG-Format abgespeichert werden. Die Software dazu läßt sich am PC über zwei Buttons in der oberen Menüzeile starten und stoppen. Der Button dient zum Starten der Software (1x Klick). Zum Beenden den Button anklicken. Nach dem Start der Software erscheinen zwei Fenster mit den Bildern der Kameras. Das aktuelle Bild wird abgespeichert in dem man mit der Maus in das jeweilige Fenster geht und die Taste *"j"* drückt. Danach erscheint ein Fenster in dem ein Dateiname angegeben werden kann. Die Bilder werden im lokalen Verzeichnis *"Prakt"* gespeichert. Auf Grund der Vielzahl der Bilder die aufzunehmen sind, empfiehlt es sich aussagekräftige Dateinamen zu verwenden. Die abgespeicherten Bilder können mit dem Programm *"Bildbetrachter"* aus der Menüzeile (unter "Anwendungen/Grafik/Bildbetrachter") kontrolliert werden.

5.4 Der Raumfilter

Es soll noch kurz die Arbeitsweise des Raumfilters MB erläutert werden. Ein Laser hat bereits eine Modenblende in seinem Grundaufbau integriert, die den Laser von seinen transversalen Moden teilweise befreien soll. Das Raumfilter MB dient dazu, den Laserstrahl nochmals zu „säubern“, so dass nur noch die zentrale Mode TEM_{00} (transversale elektrische und magnetische Mode, vgl. Hecht, Optik, Kapitel 14.2) dieses Raumfilter verlässt. Die TEM_{00}-Mode besitzt eine ideale Gaußverteilung der

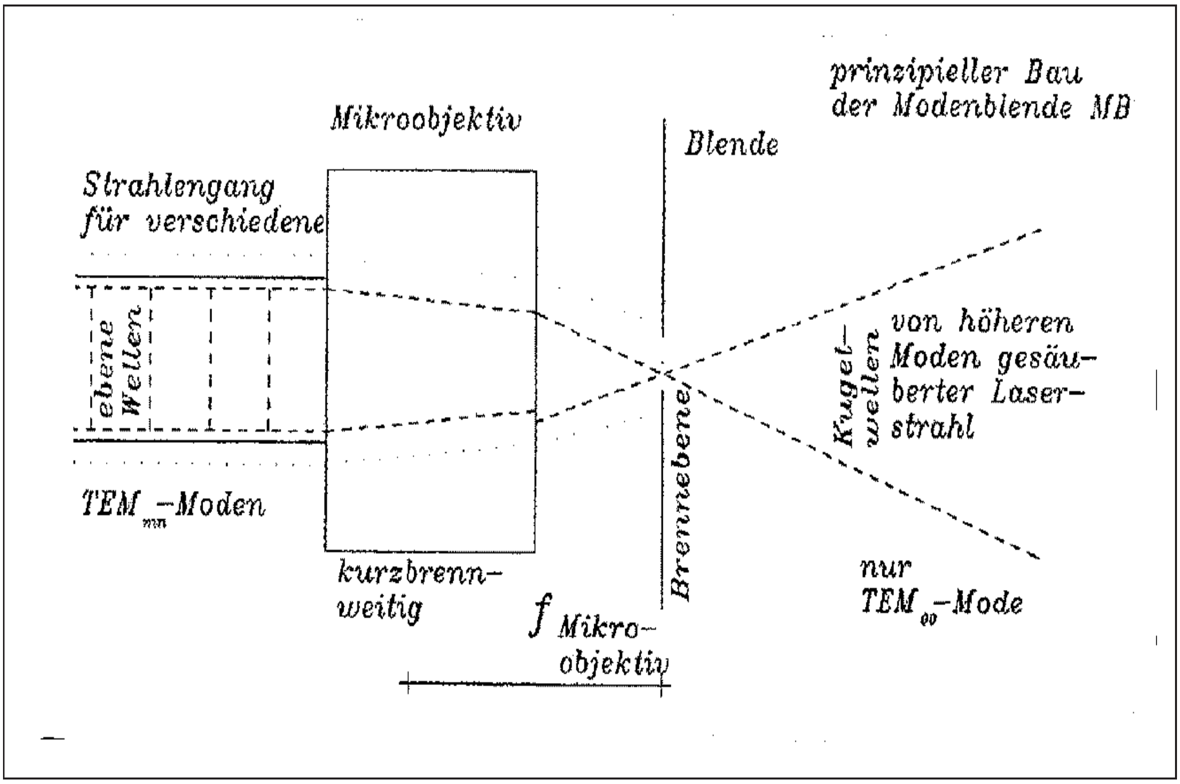

Abbildung 5.5: Aufbau des Raumfilters MB

Leistungsdichte über den Querschnitt und ist außerdem räumlich vollständig kohärent (vgl. Hecht, Optik, Kapitel 14.2).
Das Raumfilter MB vollführt bereits eine kohärente Bildverarbeitung wie sie später auch im Experiment in der Ebene S_t durchgeführt werden sollen, die durch ihre Tiefpasswirkung mittels der kleinen Blende nach dem Mikroobjektiv, das den Laserstrahl und damit auch seine Moden aufweitet, ja die höheren Ordnungen der Resonatorschwingungen des Lasers ausblendet (vgl. Abb. 5.5). Damit werden folgende wichtige Effekte erzielt:

- Die Lichtintensität wird verringert.
- *Es werden die Interferenzen vor den Objektiven der weiteren Apparatur weggefiltert,* da die höheren Moden des Lasers, die in etwa höheren Beugungsordnungen entsprechen fehlen.

6 Das experimentelle Programm

6.1 Das Justieren der Apparatur

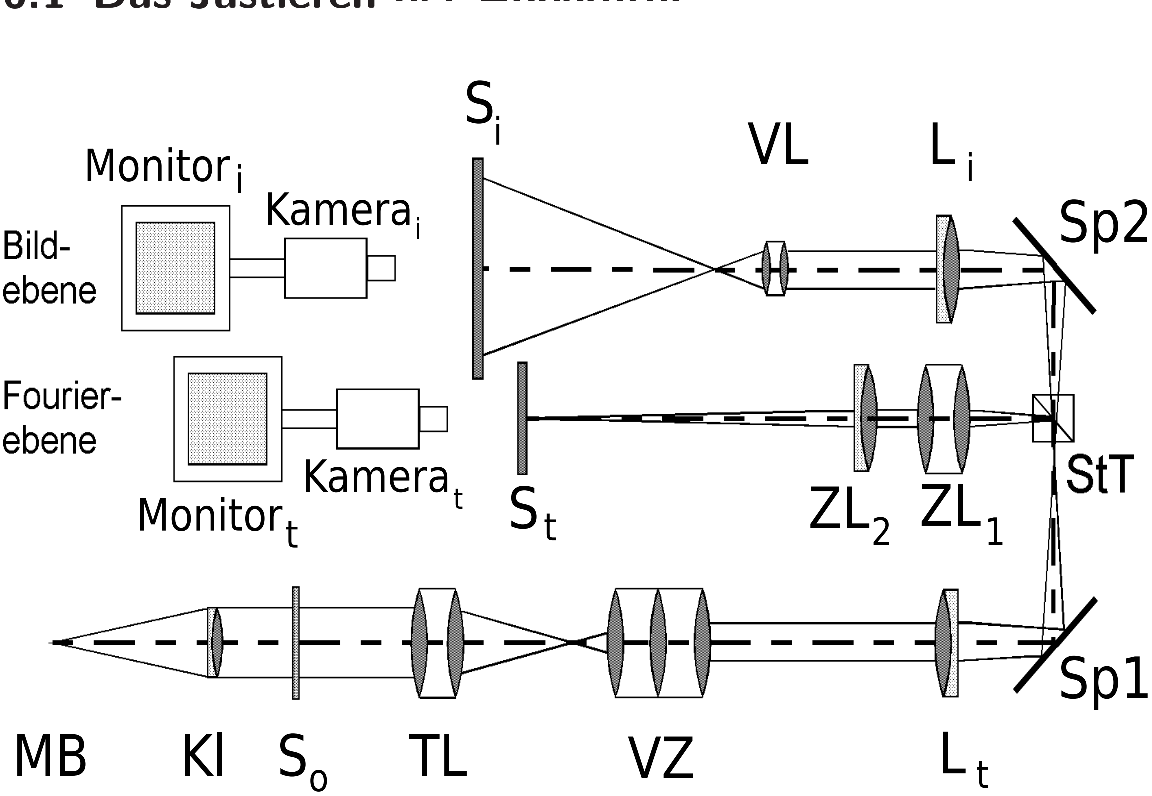

Abbildung 6.1: Justieren der Apparatur.
MB=Modenblende, Kl=Kollimator: f=300 mm, S_o=Objektebene, TL=Epiotar: f=300 mm, VZ=Zoomobjektiv: f=80-240 mm, L_i, L_t: f=500 mm, StT=Strahlteilerwürfel, VL Photobjektiv: f=210 mm, ZL_1: f=50 mm, $Sp_{1,2}$=Spiegel. Im Unterschied zu den vorigen Zeichnungen, sind die Elemente hier so angeordnet, wie Sie sie vor sich sehen, wenn Sie seitlich vor dem Tisch stehen.

6.1.1 Vorbemerkungen

Zu justieren ist ein Strahlengang entsprechend Abb. 6.1. Das Justieren einer Apparatur wird wesentlich erleichtert, wenn man ein Parallelstrahlbündel hinreichenden Durchmessers zur Verfügung hat. Dieses wird zunächst durch die Linse Kl als Kollimator erzeugt. Es folgt das aus Epiotar TL und Zoomobjektiv VZ ($f = 80{-}240mm$) gebildete Fernrohr, aus dem ein Parallelstrahlbündel mit kleinerem Durchmesser austritt. Die Hauptebenen des Zooms liegen weit auseinander. Solche Systeme sind schwer zu justieren. Dies gehört deshalb nicht zu Ihren Aufgaben. Sie haben lediglich den nun folgenden Teil der Apparatur zu justieren.

6.1.2 Fundamentale Justiertechniken

Grundbegriffe: Beim Justieren einer Apparatur sind zwei Grundaufgaben zu unterscheiden:

- Die optischen Achsen aller verwendeter Systeme müssen zur Deckung gebracht werden. Dieser Vorgang soll *Zentrieren* genannt werden.
- Zudem müssen die einzelnen Systeme auf der optischen Achse in die richtige Lage gebracht werden. Dies soll als *Positionieren* bezeichnet werden.

Technische Hilfsmittel: Das Justieren wird durch eine Reihe technischer Hilfsmittel erleichtert. Es sind:

- Die *Zentrierscheibe*, ein Schirm mit konzentrischen Ringen. Sie dient dazu den Zentralstrahl eines breiten Bündels festzulegen.
- Den *Justierstab*, ein Reiterstab mit einer durch seine Achse gehenden kleinen Bohrung. Mit seiner Hilfe kann man den Zentralstrahl eines Bündels genau über der Längsachse einer optischen Bank einjustieren. Ein Justierstab kann durch eine entsprechend montierte kleine Blende ersetzt werden.
- Den *Autokollimationsspiegel*, ein Spiegel, den man auf die Fassung von optischen Systemen auflegt. Das an ihm reflektierte Licht gibt Auskunft über die Ausrichtung der Fassung und damit des Systems.
- Den *Anschlagreitern*. Ein normaler *Reiter* besteht aus dem *Fuß*, der sich auf der *optischen Bank* verschieben und festschrauben lässt, und der *Säule*, in der der *Reiterstab* mit dem darauf befestigten optischen System in seiner Höhe justierbar und verdrehbar eingesteckt und festgeschraubt werden kann. Dagegen besteht ein Anschlagreiter nur aus einem schmalen Fuß ohne Säule Er dient dazu, die Position eines normalen Reiters zu markieren. Dieser kann dann reproduzierbar aus dem Strahlengang entfernt und wieder hineingestellt werden.
- Den *Stellringen*. Diese werden auf den Reiterstab gesteckt. Nachdem die Höhe des Systems festgelegt ist, werden sie festgeschraubt und der Stab kann verdreht werden, ohne die Höhe des Systems zu verändern.

Zentriertechniken: Das Zentrieren erfolgt in zwei Schritten:

- Zunächst ist die Achse des einzubauenden Systems parallel zur Achse der schon vorhandenen Systeme auszurichten. Die Achse eines Systems steht in der Regel auf seiner Fassung senkrecht. Diese wird ausgerichtet, indem man einen Spiegel auf ihr auflegt und sie so verdreht, dass das am Spiegel reflektierte Bündel in sich selbst zurückläuft. Man sollte versuchen, den Spiegel auf der Seite des Systems anzulegen, auf der das Bündel parallel ist (bzw. weniger divergiert). Das Verfahren wird als *Autokollimation* bezeichnet. Die technischen Details werden vom Betreuer demonstriert.

- Dann ist das System zur Achse zu zentrieren. Dazu wird die Zentrierscheibe in zwei Positionen aufgebaut: Einmal so nah wie möglich am zu zentrierenden System (Entfernung s_1) und einmal möglichst weit entfernt (Entfernung s_2). Durch Justieren soll erreicht werden, dass das das System verlassende Bündel auf der Zentrierscheibe in beiden Positionen zu ihrer Mitte zentriert ist. Dann verläuft der Zentralstrahl des Bündels parallel zur optischen Bank.
  Um das zu erreichen, kann man entweder das System oder die Zentrierscheibe verstellen. Man wählt die Möglichkeit aus, die zum kleineren Verstellweg führt. Nur dann konvergiert das Justierverfahren. In der Regel ist bei systemnaher Position der Zentrierscheibe diese, bei systemferner Position das System zu verstellen. Beide Schritte müssen Sie mehrfach wiederholen. Der Iterationsprozeß konvergiert um so schneller, je größer das Verhältnis $s_2 : s_1$ ist.

Positioniertechniken: Das Positionieren eines Systems ist einfach, falls es von einem Parallelstrahlbündel beleuchtet wird. Man stellt dorthin, wo der Brennpunkt des Systems liegen soll, eine Mattscheibe. Das System bildet das Parallelstrahlbündel in seinen hinteren Brennpunkt ab. Der dort entstehende Fokus erzeugt von den Mattscheibenkörnern Zentralprojektionsbilder. Diese sind um so größer, je weniger der Fokus von der Mattscheibe entfernt ist. Liegt er in der Mattscheibenebene, so ist ihr Durchmesser maximal. Zum Positionieren ist *die Blende des Zooms stets maximal zu öffnen*.
Um zu verstehen, dass man von Phasenobjekten wie den Mattscheibenkörnern überhaupt Zentralprojektionsbilder erzeugen kann und dass deren Durchmesser bei Lage des Projektionszentrums in der Mattscheibenebene einen endlichen Wert hat, muss man Beugungserscheinungen berücksichtigen.

6.1.3 Die einzelnen Justierschritte

Sie haben die Aufgabe, die auf das Zoom folgenden Komponenten korrekt zu justieren. Ist ein Element endgültig justiert, so ist seine Lage durch einen Anschlagreiter zu markieren. Es sind die folgenden Elemente zu justieren:

Die Spiegel: Stellen Sie beim Zoom eine Brennweite von $130mm$ ein. Schließen Sie seine Blende. Bringen Sie den Justierstab in den Strahlengang. Stellen Sie die Zentrierscheibe dahinter auf, und zentrieren Sie diese zum durch die Bohrung des Justierstabs hindurchtretenden Lichtbündel.

Setzen Sie den Spiegel Sp_1 ein. Stellen Sie die Zentrierscheibe auf die zur schmalen Seite des Tisches parallele optische Bank so nahe wie möglich am Spiegel auf. Zentrieren Sie das Bündel auf der Zentrierscheibe, indem Sie den Spiegel parallel zur optischen Bank verschieben und die Höhe der Zentrierscheibe (meist nur geringfügig) nachjustieren. Stellen Sie die Zentrierscheibe ans Ende der optischen Bank. Zentrieren Sie das Bündel erneut, indem Sie den Spiegel verdrehen und verkippen. Grobe Abweichungen werden durch Verdrehen des Spiegels mitsamt seiner Halterung, kleinere mit den beiden Justierschrauben an der Rückseite der Halterung korrigiert. Wiederholen Sie die beiden Justierschritte mit spiegelnaher und spiegelferner Zentrierscheibe, bis das Bündel exakt parallel zur optischen Bank verläuft.
Machen Sie dasselbe mit dem Spiegel Sp_2.
Beim Justieren von Sp_1 werden Sie vom Betreuer angeleitet. Sp_2 müssen Sie selbständig justieren.

Der Strahlteiler: Justieren Sie den Strahlteiler StT analog zu einem Spiegel. Da der Würfel nicht verkippt werden kann, entfällt das Justieren der Zentrierscheibenhöhe. Justieren Sie die Höhe von Linse ZL_1 und Linse ZL_2 wie unter 6.1.2 beschrieben. Justieren Sie die Fassungen von beiden durch Autokollimation. Bauen Sie die Linse ZL_2 etwa $270mm$ von der Mitte des Strahlteilers entfernt ein, und markieren Sie seine Position durch einen Anschlagreiter. Stellen Sie die Mattscheibe in seinen Fokus (siehe 6.1.2), und markieren Sie ihre Position. Ersetzen Sie die Mattscheibe durch die Zentrierscheibe. Bauen Sie die Linse ZL_1 etwa $135mm$ von der Mitte des Strahlteilerwürfels entfernt ein. Verschieben Sie den Würfel so, dass der Fokus auf der Zentrierscheibe genau über der Mitte der optischen Bank liegt. Markieren Sie die Position des Würfels.

Einbau der Linse ZL_2 als Hilfskollimator: Entfernen Sie den Strahlteiler. Stellen Sie ZL_2 auf der optischen Bank parallel zur Schmalseite des Tisches etwa $300mm$ vom Spiegel Sp_2 entfernt auf. Öffnen Sie die Blende des Zooms. Stellen Sie die Mattscheibe in den Fokus von ZL_2, und markieren Sie ihre Position.

Einbau der Linse L_t: Stellen Sie die Zentrierscheibe auf die optische Bank parallel zur Schmalseite des Tisches, und kontrollieren bzw. korrigieren Sie ihre Lage. Stellen Sie den Strahlteiler an seine alte Stelle und $70mm$ vor seine Vorderseite eine Mattscheibe (Position der dem Licht zugewandten rauhen Seite). Bauen Sie die Linse L_t mit der markierten Seite der Fassung zum Licht gewandt ein, und justieren Sie ihre Fassung durch Autokollimation. Verschieben Sie sie so, dass ihr Fokus auf der Mattscheibe liegt. Ersetzen Sie die Mattscheibe durch die Zentrierscheibe, und zentrieren Sie den Fokus durch Justieren der Linse. Entfernen Sie den Strahlteiler, und kontrollieren Sie die Zentrierung duch Aufstellen der Zentrierscheibe bei beiden Spiegeln. Kleine Abweichungen von der Höhenlage können Sie durch Nachjustieren von L_t und der Zentrierscheibe beseitigen. Bei merklichen Abweichungen in der Seitenlage oder größeren Abweichungen bei der Höhenlage ist der Betreuer zu benachrichtigen.

Einbau der Linse L_i: Bauen Sie den Teilerwürfel wieder ein, und stellen Sie die Linse L_i ans Ende der optischen Bank in die Nähe des Spiegels Sp_2. Justieren Sie ihre Fassung durch Autokollimation. Fokussieren Sie das Bündel hinter dem Hilfskollimator ZL_2 in die Ebene der dort aufgestellten Mattscheibe durch Verschieben von L_i. Entfernen Sie ZL_2 und die Mattscheibe, und zentrieren Sie L_i.

Einbau des Photoobjektivs VL: Bauen Sie das Photoobjektiv VL ($f = 50mm$) ein, justieren Sie seine Fassung durch Autokollimation, und zentrieren Sie es.

Einbau der Linse ZL_2 vor der CCC-Kamera: Entfernen Sie L_t und ZL_1 nach Markieren ihrer Position. Stellen Sie ZL_2 an seine alte Position auf der mittleren Bank zurück. Vom Strahlteiler fällt jetzt ein Parallelstrahlbündel auf ZL_2. Fokussieren Sie es durch Verschieben von ZL_2 auf die Mattscheibe. Bauen Sie L_t und das Photoobjektiv ZL_1 wieder ein. Das Licht soll ZL_1 als Parallelstrahlbündel verlassen. Das erreichen Sie, indem Sie ZL_1 so verschieben, dass das Licht von ZL_2 auf die Mattscheibe fokussiert wird.

Einstellen der Kamera: Stellen Sie die Kamera so auf, dass die Vorderkante ihres Objektivs etwa $140mm$ von der Mattscheibe entfernt ist. Benutzen Sie die kleine Irisblende als Objekt. Zentrieren Sie mit der Kamera das Beugungsbild auf dem Monitor. Stellen Sie es mit dem Kameraobjektiv scharf. Benutzen Sie den Rasterstern als Objekt. Sein Beugungsbild ist wieder ein Rasterstern. Stellen Sie die radialen Strukturen dieses Sterns durch Nachfokussieren mit dem Kameraobjektiv scharf. Kontrollieren Sie, ob Sie durch vorsichtiges Nachfokussieren von ZL_1 noch Schärfe gewinnen können.
Lassen Sie die Qualität der Beugungsbilder von Blende und Rasterstern vom Betreuer kontrollieren.

Nachbessern des Beugungsbildes: Stellen die Mattscheibe mit dem Maßstab wieder in die Ebene des Beugungsbildes. Optimieren Sie die Bildschärfe indem Sie nacheinander L_t, ZL_2 und das Kameraobjektiv verstellen.

Wechseln des Kollimators Kl: Bei Verwenden von kleinen beugenden Objekten ist der langbrennweitige Kollimator Kl ($f = 300mm$) durch einen kurzbrennweitigeren, ein Photoobjektiv von $50mm$ Brennweite, zu ersetzen. Stellen Sie dazu wieder eine Mattscheibe in die Ebene des Beugungsbildes. Stellen Sie den kurzbrennweitigen Kollimator an seine mit einem Anschlagreiter markierte Position vor der Modenblende. Zentrieren Sie damit das Beugungsbild auf dem Monitor. Fokussieren Sie den neuen Kollimator, indem Sie das Beugungsbild auf dem Monitor scharf stellen. Ein dazu geeignetes Objekt ist der Rasterstern.

6.2 Versuchsdurchführung

6.2.1 Vorbemerkungen

Hinweis zur Dokumentation Ihrer Versuchsauswertung: Für eine übersichtliche und vollständige Darstellung Ihrer Versuchsauswertung ist es ratsam, stets die nötigen Bildaufzeichnungen sowohl in der Ebene S_t, als auch in S_i, also Beugungsmuster und Bild nebeneinander anzuführen. Dadurch lassen sich die beobachteten Phänomene besonders anschaulich erklären. (siehe hierzu auch Anhang B)
Es ist aber durchaus nicht nötig, jede Beobachtung aufzuzeichnen! (siehe hierzu auch Kapitel 6.3)

Als Objekte für Ihre späteren Versuche dienen Ihnen zum einen Dias, auf denen sich das gewünschte Muster befindet und die Sie in dem Diakasten auf dem Schreibtisch vorfinden, zum anderen separate Blenden oder Objekthalter, die in der Lochplatte ebenfalls auf dem Schreibtisch stehen. Verwenden Sie als Objekthalter für die Dias einen der beiden Drehhalter und setzen Sie diesen immer auf einen verstellbaren Reiter. Grundsätzlich ist darauf zu achten, dass die Objekte gut zentriert vom Laserbündel durchstrahlt werden, denn sonst spielen häufig noch Beugungserscheinungen vom Rand der Objekte eine große Bedeutung und die zu beobachtenden Phänomene sind schwer oder gar nicht mehr zu erkennen.

6.2.2 Das Versuchsprogramm

Vorbemerkung: Für quantitative Auswertungen in der Bildebene kann es notwendig sein, von einem Bild des Maßstabs eine Aufnahme anzufertigen.
Die Abbildungsmaßstäbe sind in horizontaler und vertikaler Richtung verschieden. Es ist vorteilhaft, den Maßstab bei einer der Messungen nicht nur waagerecht, sondern auch senkrecht aufzunehmen.

1. Machen Sie sich durch Experimente mit Kreisblenden, Spalten und Gittern verschiedener Größe bzw. Gitterkonstante mit den Eigenschaften der Apparatur vertraut. Beobachten Sie, wie Sie die Größe des primären Bildes auf dem Monitor mit dem Zoom des Fernrohrs und dem Zoom der Kamera verändern können. Hinweis für spätere Experimente: Wenn Sie die Größe des primären Bildes mit dem Zoom des Fernrohrs verändern, so verschiebt sich dadurch das primäre Bild geringfügig zur Seite.

2. a) Betrachten Sie die Beugungsbilder der Irisblende bei mehreren Blendengrößen. Wählen Sie davon zwei aus, die in der Beugungsebene hinreichend genau vermessen werden können. Wählen sie zusätzlich dazu zwei Gitter aus, bei denen Sie bei gleichen Einstellungen der Apparatur im Beugungsbild die zweiten Ordnungen noch ausmessen können. Ist beides

nicht gleichzeitig möglich, so muss eine andere Vergrößerung für das Beugungsbild mit Hilfe der beiden Zooms eingestellt werden.
Machen Sie bei gleicher Justierung der Apparatur Aufnahmen der Bilder und Beugungsbilder der Kreisblende und des Gitters bei zwei verschiedenen Größen bzw. Gitterkonstanten.

   b) Betrachten Sie die Beugungsbilder der Lochblenden bei verschiedenen Blendengrößen.
   c) Blenden Sie in der Beugungsebene das zentrale Beugungsmaximum aus.

3. Kreuzen Sie zwei Spalte und justieren Sie so, dass Sie die auf der Diagonalen auftretenden Maxima nachweisen können.

4. a) Benutzen Sie das Gitter mit der zweitgrößten Gitterkonstanten. Setzen Sie davor eine Irisblende. Schließen Sie sie soweit, dass nur wenige Striche des Gitters hindurchgelassen werden. Verschieben Sie die Irisblende senkrecht zur optischen Bank entlang des Gitters und beobachten Sie die Änderungen am Beugungsbild. Der Effekt ist besonders deutlich, wenn Sie die Blende schnell verschieben. Wie ist die Erscheinung theoretisch zu erklären? Machen Sie Aufnahmen von zwei charakteristischen Situationen.
   b) Machen Sie das analoge Experiment mit einem Gitter und einem Spalt.

5. Experimente mit dem Rasterstern 1
   a) Benutzen Sie den Rasterstern mit einer davor aufgestellten Irisblende. Zentrieren Sie im primären Bild die kleine Irisblende. Hierbei kann eine in der Nähe des Objektes aufgestellte kleine Kreisblende nützlich sein. Zentrieren Sie die Irisblende vor dem Objekt zum Stern. Beobachten Sie dabei sowohl das primäre als auch das sekundäre Bild. Sie erkennen jetzt im primären Bild eine Bandpasscharakteristik. Änderen Sie die untere und obere Grenze des Bandpasses systematisch, und beobachten Sie die Auswirkungen auf das sekundäre Bild. Machen Sie Aufnahmen von zwei deutlich unterschiedlichen Situationen.
   b) Filtern Sie ein Bild des Sterns mit zwei Systemen von Ringblenden (mehr als zwei Ringe!). Die Qualität des sekundären Bildes hängt ganz wesentlich von einer sorfältigen Justierung der Ringe ab. Achten Sie darauf, dass die im sekundären Bild beobachtbaren Bandsperren gut ausgeprägt sind.

6. Experimente mit dem Rasterstern 2
   a) Machen Sie defokussierte Aufnahmen ($10cm$) vom Rasterstern (in der runden Fassung). Machen Sie eine Aufnahme des Maßstabs, um die Ortsfrequenzen im Bild in Angaben im Objekt umrechnen zu können.
   b) Machen Sie eine Aufnahme des Rastersterns mit der Foucaultschen Schneide in der Beugungsebene.

c) Machen Sie eine Aufnahme des defokussierten Rastersterns mit der Foucault'schen Schneide in der Beugungsebene.

d) Machen Sie eine weitere defokussierte Aufnahmen ($20cm$) vom Rasterstern.

7. Benutzen Sie das grob gerasterte Photo und entfernen Sie das Druckraster, indem Sie mit der kleinen Irisblende höhere Ordnungen ausblenden. Welche anderen Möglichkeiten zum Entfernen des Rasters gibt es noch?

8. Benutzen Sie Buchstaben als Objekte. Blenden Sie einzelne Buchstaben mit einer Irisblende aus. Beobachten Sie, wie sich das Bild eines Buchstabens ändert, wenn Sie im primären Bild mit der kleinen Irisblende höhere Ortsfrequenzen ausblenden. Die kleine Blende ist dazu möglichst sorfältig zu zentrieren. Machen Sie dies bei ähnlichen Buchstaben, und prüfen Sie, welche Orstfrequenzen man benötigt, damit sie unterscheidbar bleiben.
   Bei Buchstaben mit ausgeprägten linearen Elementen kann man deren Auswirkungen aufs Beugungsbild meist identifizieren. Verifizieren Sie dies, indem Sie die entsprechenden Stukturen im Beugungsbild mit einem Spalt ausblenden.

9. Benutzen Sie die Aufnahme von Connexon als Objekt. Filtern Sie mit der entsprechenden Maske nur die Hauptmaxima heraus.
   Hinweise zum Justieren: Die Größe des primären Bildes ist mit dem Zoom des Fernrohrs an die Maske anzupassen.
   Da Sie mit einem periodischen Objekt arbeiten, können Sie die Struktur des sekundären Bildes durch Defokussieren massiv beeinflussen, ohne dass dabei eine Struktur schärfer als die andere erscheint. Die Grundlagen dieses Phänomens haben Sie in einem früheren Experiment untersucht. In welchem? Wie können Sie die wirkliche Bildebene finden?
   Wenn das Beugungsbild des Objektes und die Maske gegeneinander verdreht sind, können Sie zum Justieren sowohl das Objekt als auch die Maske verdrehen. Was ist vorteilhafter?

6.3 Auswertung

6.3.1 Auswertung von Beugungsbildern

Vorschläge für quantitative Auswertungen: Quantitative Auswertungen sind an mehreren Stellen sinnvoll:

1. Für die Beugungsbilder von Spalt, Kreisblende und Gitter.

2. Für die obere und untere Grenze des Frequenzbandes bei der Bandpassfilterung am Rasterstern.

3. Für die Mitte der durchgelassenen Frequenzbänder bei der Filterung des Sterns mit Ringblenden.

4. Für die defokussierten Aufnahmen des Raster- und des Phasensterns.

Vorgehen bei der Auswertung: Zur Auswertung messen sie die Größe der Objekte bzw. die Gitterkonstanten und die Größe der Beugungsbilder (Breite des zentralen Maximums bzw. Lage der ersten Beugungsordnung). Berechnen Sie die Produkte aus Größe des Objektes und des Beugungsbildes. Vergleichen Sie das Verhältnis der Produkte zueinander mit dem theoretischen Wert.
Bei der Bandpassfilterung an Sternaufnahmen ist analog zu verfahren.

6.3.2 Auswertung der defokussierten Sternaufnahmen

Zur Auswertung messen Sie die Lage der Nullstellen der übertragungsfunktion auf den Sternaufnahmen aus. Die Interpretation hat von der Formel für die übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} D_A(R) &= \cos\{\pi i \Delta z \lambda R^2\} \\ D_P(R) &= \sin\{\pi i \Delta z \lambda R^2\} \end{aligned}$$

auszugehen. Mit Hilfe dieser Formeln kann man den Zusammenhang zwischen der Ordnung einer Nullstelle und ihrer Lage linearisieren (siehe Theorie, Abschnitt 4.2.5). Zudem kann man durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor den Einfluß der verschiedenen Werte für die Defokussierung und die Sektorenzahl eliminieren. Als Ergebnis all dieser überlegungen erhalten Sie bei Auftragen der geeignet skalierten Messwerte über der Ordnungszahl einen Graphen, in dem sämtliche Messwerte auf einer Geraden liegen. Vergleichen Sie die Steigung dieser Geraden mit dem theoretischen Wert.
Hinweise: Für den Vergleich mit der Theorie müssen Sie den Abbildungsmaßstab berücksichtigen. Sie erhalten nur dann eine Gerade für alle Messpunkte, wenn Sie auch halbzahlige Ordnungszahlen einführen.

6.3.3 Hinweise zur Ausarbeitung

Abschließend seien noch die Kriterien angeführt, die Sie beim Anfertigen Ihren Praktikumsausarbeitung beachten sollten:

- Wir erwarten keine Abhandlung zur allgemeinen Theorie, die dem Versuch zugrunde liegt, denn eine Kurzzusammenfassung steht ja bereits in der Versuchsanleitung; außerdem erscheint es überflüssig Seiten aus Lehrbüchern zusammenzuschreiben.

- Eine kurze Beschreibung des Versuchsaufbaus erscheint dagegen doch sinnvoll, damit Ihre Unterlagen zuhause vollständig sind.

- Wenden Sie also die Theorie stets auf die konkret durchgeführten Experimente an.
- Es erscheint uns wichtig, dass Sie einerseits die Phänomenologie der Versuche verstehen und beschreiben, dass Sie aber auch dabei eine mathematische Diskussion nicht ganz vergessen.
- **Kurz: Wir wollen, dass Sie das protokollieren, was Sie auch tatsächlich gemacht haben!**
- Bei der Ausarbeitung sollten folgende Experimente **ausführlich** dargestellt werden:
  - Die in 2a angegebenen Versuche zu Blenden, Spalten und Gitter, wobei hier auch eine umfassende mathematische Diskussion erforderlich ist.
  - Die Versuche mit Gitter2 und der Irisblende; Punkt 4a.
  - Die in 5a ausgeführten Versuche mit dem Sektorstern.
  - Die defokussierte Beobachtung des Sektor- oder Phasensterns wie in 6a beschrieben.
- Die Ausarbeitung der anderen Versuche kann knapper erfolgen.
- Vergessen Sie nicht Ihre Ausarbeitung mit Ihren Aufnahmen zu dokumentieren.
- Nochmals wollen wir betonen, dass uns die ausführliche Bearbeitung der interessanteren Aspekte am Herzen liegt.

A Grundregeln des Laserschutzes

Der im Versuch „Kohärente Bildverarbeitung“ verwendete Laser mit $10mW$ Ausgangsleistung vermag Ihr Auge zu schädigen. Die im Folgenden aufgeführten Regeln sind deshalb **strikt** einzuhalten.

1. Blicken Sie **niemals** in den ungeschwächten Laserstrahl.

2. Schützen Sie sich und Ihre Kommilitoninnen und Kommilitonen vor ungewollter Exposition durch Laserstrahlung, indem Sie:
   - Beim Hantieren an der Apparatur Ringe, Armreifen und Armbanduhren abnehmen.
   - Beim Justieren darauf achten, dass der Strahl die Arbeitsplatte nicht verlässt.

3. Verwenden Sie beim Justieren immer dann, wenn Sie in den geschwächten Strahl blicken, die Laserschutzbrillen, die im Raum ausliegen.

B Ein Beispiel zur Bildaufnahme

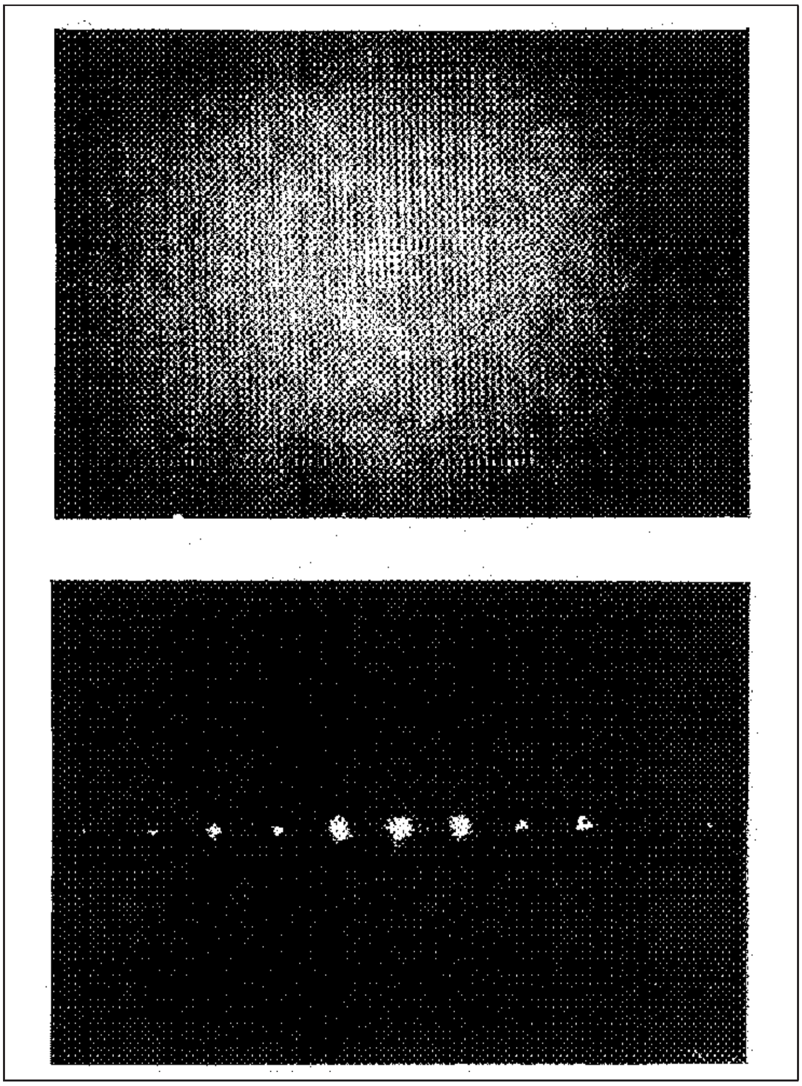

Abbildung B.1: Bild und Beugungsmuster von Gitter1 ohne Spalt

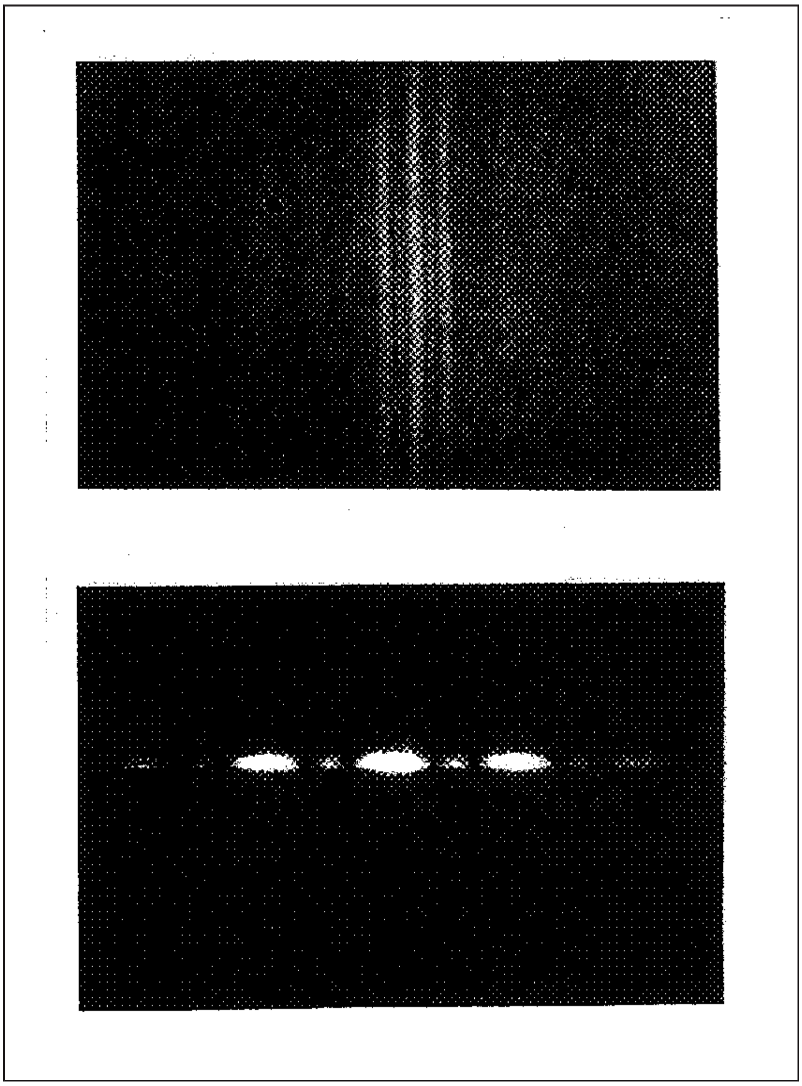

Abbildung B.2: Bild und Beugungsmuster von Gitter1 mit schmalem Spalt

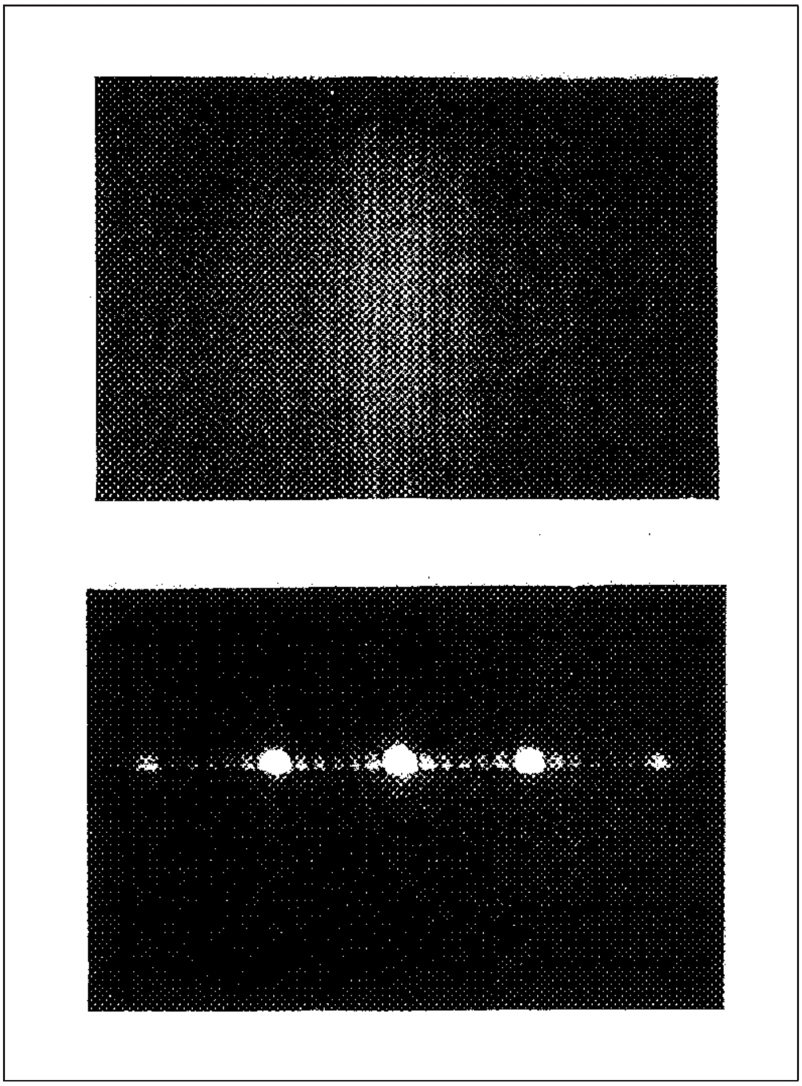

Abbildung B.3: Bild und Beugungsmuster von Gitter1 mit etwas breiterem Spalt

C Mathematische Grundlagen

Dieser Abschnitt will Ihnen eine kurze Zusammenfassung bzw. einen kleinen Überblick über die mathematischen Grundlagen geben, die dem Versuch zugrundeliegt.

Weiter sei bemerkt, dass in diesem Paragraphen Vektoren stets **fett** geschrieben dargestellt werden.

C.1 Korrelation

Um zwei Signale im Hinblick auf den Grad der Ähnlichkeit unter ihnen zu vergleichen, verwendet man die Korrelationsanalyse. Dabei ist die *Autokorrelation* definiert als

$$c_{ff}(u,v) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) f^*(x-u, y-v) dx\, dy, \tag{C.1}$$

wofür oft auch geschrieben wird

$$c_{ff}(u,v) = f(u,v) \odot f^*(u,v). \tag{C.2}$$

Bei der Autokorrelation wird die ursprüngliche Funktion räumlich um einen Vektor (u,v) verschoben, das Produkt aus verschobener und nichtverschobener Funktion gebildet und die (dem Überlappungsgrad entsprechende) Fläche unter dieser Produktkurve mittels des Integrals berechnet. Die Autokorrelations-Funktion $c_{ff}(u,v)$ liefert nun das Ergebnis dieser Flächenberechnung nicht nur für einen, sondern für alle Werte von (u,v). Ein praktischer Grund für dieses Verfahren wäre z.B. das Herausheben eines Signals aus einem Hintergrundrauschen.
Ähnlich zur Autokorrelation ist die *Kreuzkorrelation* definiert, nähmlich

$$c_{fg}(u,v) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) g^*(x-u, y-v) dx\, dy \tag{C.3}$$

oder abkürzend

$$c_{fg}(u,v) = f(u,v) \odot g^*(u,v). \tag{C.4}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass eine Faltung eine der Funktionen spiegelt und dann die Überdeckungsfläche, d.h. die Fläche unter der Produktkurve aufsummiert. Im Gegensatz dazu addiert die Korrelation die Überlappung auf, ohne eine der Funktionen zu spiegeln.
Aus den Korrelationen erhält man sofort zwei wichtige Theoreme:

1. Der *Wiener-Khintchine-Satz* besagt, dass die Fouriertransformierte der Autokorrelation einer Funktion $f(x)$ das Betragsquadrat der Fouriertransformierten von $f(x)$ ist; in Formeln:

$$T\{c_{ff}(x)\} = \tilde{f}(R)\tilde{f}^*(R) = |\tilde{f}(R)|^2 \tag{C.5}$$

   wobei $T\{..\}$ die Fouriertransformation bezeichnet und $|\tilde{f}(R)|^2$ „*Wienerspektrum*“ oder „spektrale Energieverteilung“ genannt wird.

2. Die *Parsevalsche Gleichung* lautet

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(R)\tilde{g}^*(R)dR \tag{C.6}$$

   und für $f = g$ gilt weiter

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(R)|^2 dR. \tag{C.7}$$

   Diese Beziehung zeigt uns, dass das Integral über das Betragsquadrat einer Funktion f gleich dem Integral über das Betragsquadrat seines Spektrums ist.

C.2 Fouriertransformation

Definitionen

1. Hier wird die *Fouriertransformation* in der folgenden Weise definiert:

$$\tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx \tag{C.8}$$

   und die *inverse Fouriertransformation* als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)e^{-ikx}dk. \tag{C.9}$$

   Dabei werden üblicherweise die Fourierpaare durch den gleichen Buchstaben, einmal den kleinen, einmal den großen, oder durch einen Buchstaben mit und ohne einer ˜ (Tilde) darüber bezeichnet.

   Zur Interpretation der Fouriertransformierten sei hier nur kurz auf Fourierreihen und den Grenzwertbildungsprozess bei Reihen hingewiesen.

2. Integraltransformationen der Form

$$h(x') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x'-x)g(x)dx \quad \text{oder kurz} \quad h(x') = f(x') \star g(x') \tag{C.10}$$

werden *Faltungsintegrale* oder einfach *Faltung* genannt.

Man ordnet also jedem Punkt einer Funktion eine zweite Funktion zu, die durch erstere „gewichtet“ wird. über die Gesamtheit der zugeordneten Funktionen wird integriert. Man beachte auch die Symmetrie des Integrals bzgl. der beiden Integrandenfunktionen.

3. Einige wichtige Funktionen

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\mathrm{circl}(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r < 1 \\ 0 & \text{sonst} \\ \text{mit} & r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\mathrm{beinc}(x) = \frac{2J_1(x)}{x}$$

Hierbei bezeichnet $J_k(x)$ die Bessel-Funktion der Ordnung k.

Grundlegende Sätze

1. Ortsverschiebungen werden in Phasenverschiebungen transformiert:

$$g(x) = f(x-x_0) \quad \rightarrow \quad \tilde{g}(k) = \tilde{f}(k)e^{-ikx_0} \tag{C.11}$$

2. Symmetrieeigenschaft für reellwertige Funktionen:

$$f(x) \quad \text{reell} \quad \rightarrow \quad \tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k) \tag{C.12}$$

3. Der *Faltungssatz*:

$$h(x) = f(x) \star g(x) \quad \rightarrow \quad \tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k) \tag{C.13}$$

Alle bisher angeführten Formeln gelten ebenso zweidimensional.

C.3 Die Dirac'sche Delta-Distribution

Die Dirac'sche Delta-Distribution steht in engem Zusammenhang mit der Fouriertransformation. Hier sollen die wichtigsten Eigenschaften dieser Distribution zusammengefasst werden.

1. Die *Dirac'sche Delta-Distribution* wird definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases} \tag{C.14}$$

   mit der Zusatzbedingung

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{C.15}$$

2. Unter der *siebenden Eigenschaft* der Delta-Distribution versteht man:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{C.16}$$

3. Die integrale Darstellung der Delta-Distribution lautet:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x_0)} dk. \tag{C.17}$$

Am Ende sei noch darauf hingewiesen, dass die oben angeführten Punkte auch analog in mehrdimensionalen Räumen gelten.

C.4 Fourier-Transformiertenpaare

In der Tabelle C.1 sind x und k die korrespondierenden Koordinaten in Orts- und Fourierraum. In zwei Dimensionen ist r die radiale Komponente der Polarkoordinaten im Realraum und k die radiale Komponente im Fourierraum.

C.5 Point Spread Function

Die Point Spread Function ist die Helligkeitsverteilung in der Brennebene einer Linse, die von einer punktförmigen Quelle im Unendlichen entsteht (Fraunhofer Näherung). Dazu betrachten wir eine monochromatische, ebene Welle mit der Wellenlänge λ, die sich in positiver X-Richtung ausbreitet und auf ein Objekt trifft. Wir suchen die Intensität an einem beliebigen Punkt P in großer Entfernung hinter dem Objekt (siehe Bild C.1). Es sei dS ein Flächenelement das klein gegen die Wellenlänge λ sein soll. Somit können alle Beiträge aus dS als phasengleich angegesehen werden

Funktion	Realraum	Fourierraum
δ-Funktion	$\delta(x-x_0)$	e^{ikx_0}
Dirac-Kamm	$\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x-ja)$	$\frac{2\pi}{a} \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(k-\frac{2\pi j}{a}\right)$
Rechteck-Funktion	$\mathrm{rect}\,(x/a)$	$a\ \mathrm{sinc}\left(\frac{ak}{2}\right)$
Dreieck-Funktion	$\begin{cases} 1/a\left(1-\frac{\lvert x\rvert}{a}\right) & \text{für } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$4a^2\ \mathrm{sinc}^2(ak)$
Zylinderfunktion	$\mathrm{circl}\,(r/d)$	$\pi d^2\ \mathrm{beinc}(kd)$
Gauß-Kurve	$\sqrt{\frac{a}{\pi}}\ \exp\left(-ax^2\right)$	$\exp\left(\frac{-k^2}{4a}\right)$

Tabelle C.1: Einige Fourier-Transformiertenpaare

und addieren sich damit auf. Dies gilt für alle Winkel Θ, d.h. im Flächenelement dS wird eine Kugelwelle emitiert (Fresnel-Huygens-Prinzip). Für diese Kugelwelle können wir schreiben:

$$dE = \left(\frac{\epsilon}{r}\right) e^{i(\omega t - kr)} dS \tag{C.18}$$

Dabei ist ϵ die Quellstärke pro Flächenelement, r der Abstand vom Flächenelement dS in der Objektebene zum Punkt P, ω die Kreisfrequenz und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl. Des weiteren wird die Quellstärke ϵ als konstant über die Öffnung angenommen.

Als nächstes müssen wir nun den Abstand r durch die Koordinaten x,y,z in der Objektebene und X,Y,Z in der Beobachtungsebene ausdrücken (siehe Bild C.2). Ist die Ausbreitungsrichtung die x-Richtung und somit gleich der X-Richtung, so ergibt sich für den Abstand r:

$$r = \sqrt{X^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2} \tag{C.19}$$

Durch Ausmultiplizieren und unter Verwendung von $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ergibt sich:

$$r = \sqrt{R^2 + y^2 + z^2 - 2(Yy + Zz)} \tag{C.20}$$

Da der Abstand r groß gegen y und z angesehen werden kann, können wir diese beiden Größen vernachlässigen und wir erhalten:

$$r = R\sqrt{1 - 2\frac{(Yy + Zz)}{R^2}} \tag{C.21}$$

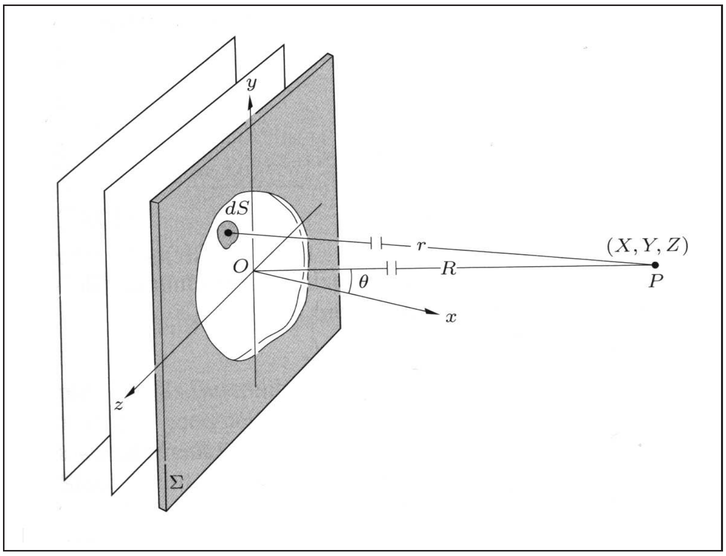

Abbildung C.1: Geometrie bei der Fraunhofer-Näherung.

Die Entwicklung des Wurzelterms bis zum 2. Glied ergibt:

$$r = R\left[1 - \frac{(Yy + Zz)}{R^2}\right] \tag{C.22}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gl.C.18 ein, so erhalten wir für den gesamten Beitrag zum Feld E im Punkt P in der Fraunhofer-Näherung:

$$E = \frac{\epsilon \cdot e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int e^{ik(Yy+Zz)/R} \, dS \tag{C.23}$$

Nachdem die Geometrie kreissymmetrisch um die optische Achse ist, ist es von Vorteil Polarkoordinaten zu verwenden:

$$\begin{array}{ll} y = \rho sin(\phi) & z = \rho cos(\phi) \\ Y = q sin(\Phi) & Z = q cos(\Phi) \end{array}$$

mit dem Flächenelement:

$$dS = \rho d\rho d\phi \tag{C.24}$$

Verwenden der Polarkoordinaten in Gl.C.23 ergibt:

$$E = \frac{\epsilon \cdot e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^{a} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho q/R)cos(\phi-\Phi)} \, \rho d\rho d\phi \tag{C.25}$$

Auf Grund der Kreissymmetrie können wir den Punkt P bzgl. der Koordinate Φ freiwählen, denn das Ergebnis darf auf Grund der Symmetrie nicht von Φ abhängen. Zur Vereinfachung wählen wir $\Phi = 0$. Für die ϕ-Integration ergibt sich dann:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho q/R)cos(\phi)} \, d\phi = 2\pi \cdot J_0\left(\frac{k\rho q}{R}\right) \tag{C.26}$$

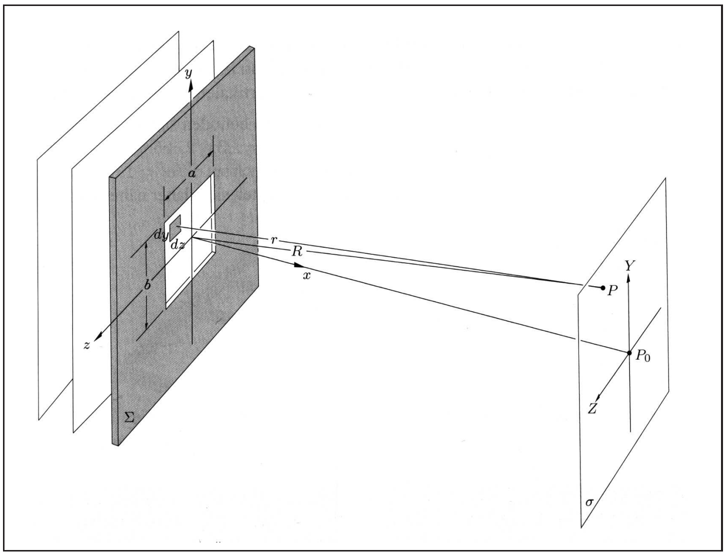

Abbildung C.2: Geometrie bei der Fraunhofer-Näherung.

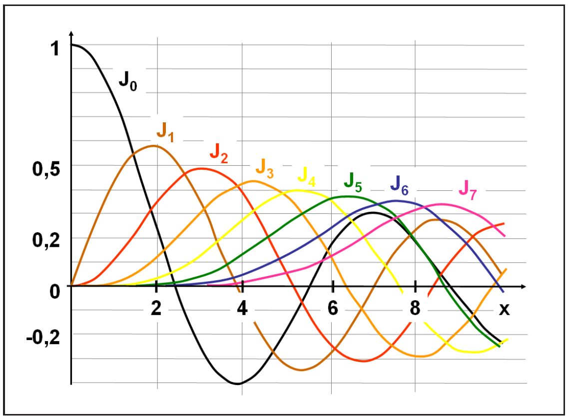

Abbildung C.3: Besselfunktionen 1. Ordnung.

wobei J_0 die Bessel-Funktion erster Art und 0. Ordnung ist (vgl. Bild C.3). Bild C.3 zeigt die ersten 7 Besselfunktionen erster Art. Die Werte der Besselfunktion berechnet man entweder mit einer Näherungslösung oder mit Hilfe von Tabellen (siehe z.B. *https://mhf-e.desy.de/e638/e988/*).

Verwenden wir das Ergebnis für die Integration über ϕ in Gl. (C.25), so erhalten wir:

$$E = \frac{\epsilon \cdot e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi \int_{\rho=0}^{a} J_0 \left(\frac{k\rho q}{R} \right) \rho d\rho \tag{C.27}$$

Zur Integration über die Besselfunktion können wir die folgende Rekursionsformel für Besselfunktionen benutzen:

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u) \tag{C.28}$$

für $m = 1$ folgt daraus:

$$\int_0^u u' J_0(u') du' = u J_1(u) \tag{C.29}$$

Jetzt müssen wir nur noch eine Variablensubstitution durchführen $u' = k\rho q/R$ mit $d\rho = (R/kq)du'$ und erhalten dann für unser Integral für das gesamte E-Feld im Punkt P:

$$E = \frac{\epsilon \cdot e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi a^2 \frac{R}{kaq} J_1\left(\frac{kaq}{R}\right) \tag{C.30}$$

Die Bestrahlungsstärke I im Punkte P und damit die Point-Spread-Function, oder auch airy-Funktion ergibt sich als Betragsquadrat des E-Feldes:

$$I = \frac{2\epsilon^2 A^2}{R^2} \left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{kaq/R}\right]^2 \tag{C.31}$$

Abb. C.4 zeigt ein zweidimensionales Bild der airy-Funktion. Die erste Nullstelle

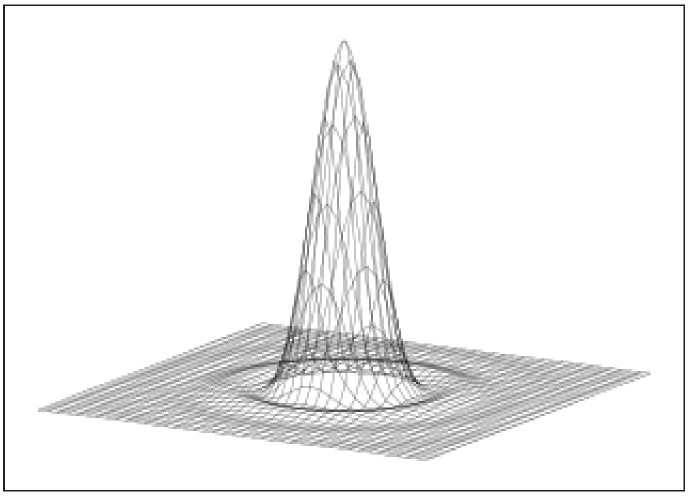

Abbildung C.4: Airy-Funktion.

dieser Funktion findet sich bei:

$$a \sin\Theta = 1,22 \cdot \lambda \tag{C.32}$$

wobei a der Durchmesser der Apertur ist.

Abbildungsverzeichnis

3.1 Abbildung eines Doppelspaltes durch eine Linse. 5
3.2 Beugung am Doppelspalt. 6
3.3 Abbildung eines Punktes, Punktverwaschungsfunktion. 8
3.4 Beugung am Doppelspalt: Ein Beispiel für das Faltungstheorem. . . . 11
3.5 **PSF** und **OTF** im Zusammenhang 14

4.1 Die Wellenfront bei Defokussierung 20
4.2 Der Rasterstern 21
4.3 Beugung am Rasterstern 22
4.4 Stern und Foucault-Schneide 23
4.5 Übertragungsfunktionen bei Defokussierung. 24

5.1 Die Apparatur 29
5.2 Der Versuchsaufbau, Schema, 4-f-Set 30
5.3 Prinzipieller Versuchsaufbau 31
5.4 Der Versuchsaufbau, Realisierung mit Bildbeobachtung. 33
5.5 Aufbau des Raumfilters MB 34

6.1 Justieren der Apparatur. 35

B.1 Bild und Beugungsmuster von Gitter1 ohne Spalt 48
B.2 Bild13b und Beugungsmuster von Gitter1 mit schmalem Spalt 49
B.3 Bild und Beugungsmuster von Gitter1 mit etwas breiterem Spalt . . . 50

C.1 Geometrie bei der Fraunhofer-Näherung. 56
C.2 Geometrie bei der Fraunhofer-Näherung. 57
C.3 Besselfunktionen 1. Ordnung. 57
C.4 Airy-Funktion. 58

Tabellenverzeichnis

C.1 Einige Fourier-Transformiertenpaare 55

Index

δ-Funktion, 3, 10, 54
Übertragungsfunktion, 4, 10

abberationsfrei, 12
Abbesche Abbildungstheorie, 3
Amplitudenübertragungsfunktion, 4
Autokollimation, 4, 37
Autokorrelation, 4, 51

Besselfunktion, 53, 57
Beugung, 5
  Fraunhofer, 3, 6, 9
  Fresnel, 6
Bild
  primär, 30, 31
  sekundär, 30, 31
Bildinformation, 7
Blendenöffnungsfunktion, 3, 7

Dirac-Kamm, 11, 54
Distribution, 54
Doppelspalt, 5

Faltung, 10, 52, 53
Faltungsintegral, 53
Faltungssatz, 53
Faltungstheorem, 3, 10
Fermatsches Prinzip, 6
Filterung
  räumlich, 2
Fourieranalyse, 1
Fourierebene, 9, 29
Fourierkomponenten, 1
Fourieroptik, 8
Fourierreihe, 9
Fouriertransformation, 1, 3, 9, 52
Fouriertransformator, 7
Fraunhofersches Beugungsintegral, 10

Frequenzen
  räumlich, 1
Frequenzraum, 7
Funktion
  δ, 3, 10, 54
  beinc, 53
  Bessel, 53, 57
  circl, 53
  Dreieck, 54
  Rechteck, 54
  rect, 11, 53
  sinc, 11, 53
  Zylinder, 54

Gauß-Kurve, 54

Interferenz, 3

Kontrast, 4, 14
Kreuzkorrelation, 4, 51

Laserschutz, 1
Lichtwellen
  Amplituden, 1
  Phasen, 1

Modenblende, 4
Modulation, 4
modulation transfer function, 14
Modulationsübertragungsfunktion, 14

Ortsfrequenz, 7
Ortsfrequenzfilterung, 13

Parsevalsche Gleichung, 52
Phasenübertragungsfunktion, 14
point spread function, 3, 8, 13, 54
Punktverwaschungsfunktion, 3, 8, 13, 54

räumliche Filterung, 13
Raumfilter, 4, 33
Raumfrequenz, 7
rauminvariant, 12
reziproker Raum, 7

Schlierenverfahren, 19
spatial redistribution function, 8

Wellen
    ebene, 9
Wiener-Khintchine-Satz, 52
Wienerspektrum, 52