# Wechselstromkreise mit komplexem Widerstand

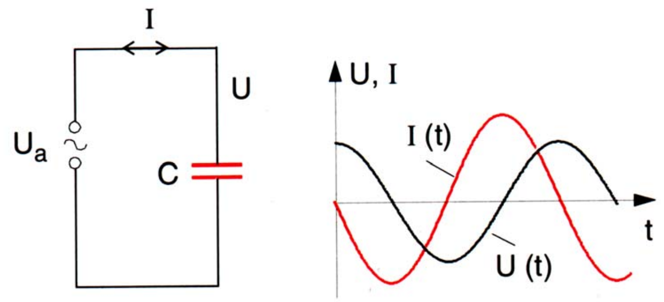
Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$ für "Widerstand" R

Gilt auch für Wechselstrom $U(t) = U_o \cdot \cos(\omega t)$

Für **Kapazität** C gilt:

$$I(t) = \omega C \cdot U_o \cdot \cos(\omega t + 90°)$$

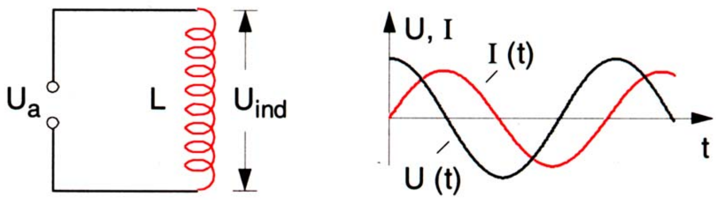
Strom eilt der Spannung um 90° voraus !




Für **Induktivität** L gilt:

$$I(t) = \frac{1}{\omega L} \cdot U_o \cdot \cos(\omega t - 90°)$$

Strom hängt der Spannung um 90° nach !




MU

In allen drei Fällen (R, C, L) ist der Maximalwert des Stroms dem Maximalwert der Spannung proportional und die Zeitabhängigkeit durch "cos"-Funktion gegeben!

Mit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ läßt sich eine **komplexwertige Beschreibung** herleiten:

- reale Spannung und realer Strom sind der Realteil der komplexen Spannung und des komplexen Stroms
- Verhältnis aus U und I ist konstant, der **komplexe Widerstand Z** (Zeigerdiagramm !)

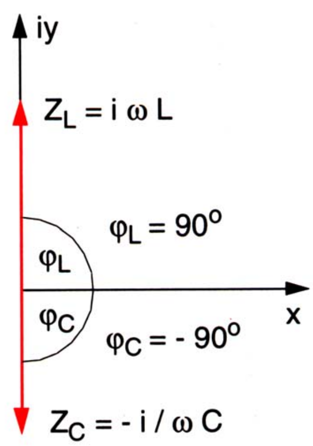
Spannung, Strom; $U(t) = U_o \cdot e^{i\omega t}$ $I(t) = I_o \cdot e^{i\omega t + \varphi}$

komplexer Widerstand: $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_o}{I_o} e^{i\varphi} = |Z|\, e^{i\varphi}$

Impedanz: $|Z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,Z)^2 + (\mathrm{Im}\,Z)^2}$

Phasenverschiebung: $\varphi = \tan^{-1}(\mathrm{Im}\,Z / \mathrm{Re}\,Z)$

Wirkwiderstand: Re Z Blindwiderstand: Im Z




$Z(R) = R$ $Z(C) = -i\frac{1}{\omega C}$ $Z(L) = i\omega L$

## Reihenschaltung komplexer Widerstände:

Durch alle Widerstände fließt der gleiche Strom; Spannungen addieren sich.

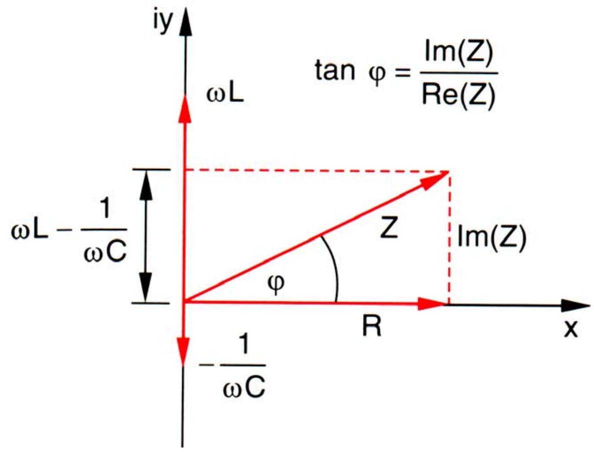
$$U(t) = Z_{tot} \cdot I(t) = U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = (Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot I(t)$$

$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

## Parallelschaltung von komplexen Widerständen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{Z_n}$$ komplexe Leitwerte




## Effektivwerte und Leistung

Leistung, die von Wechselspannung in R verbraucht wird ist:

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{U(t)^2}{R} \right\rangle = \left\langle \frac{U_o^2 \cos(\omega t)^2}{R} \right\rangle = \frac{U_o^2}{R} \left\langle \cos(\omega t)^2 \right\rangle = \frac{U_o^2}{R} \cdot \frac{1}{2}$$

Gleichspannung $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_o$ ergibt gleiche Leistung !!

**Definition**: Effektivspannung und Effektivstrom sind die Gleichspannung bzw. der Gleichstrom, die gleiche Leistung am Widerstand liefern wie ein beliebiges periodisches Wechselsignal.

Für cos-förmige Signale gilt $A_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_o$

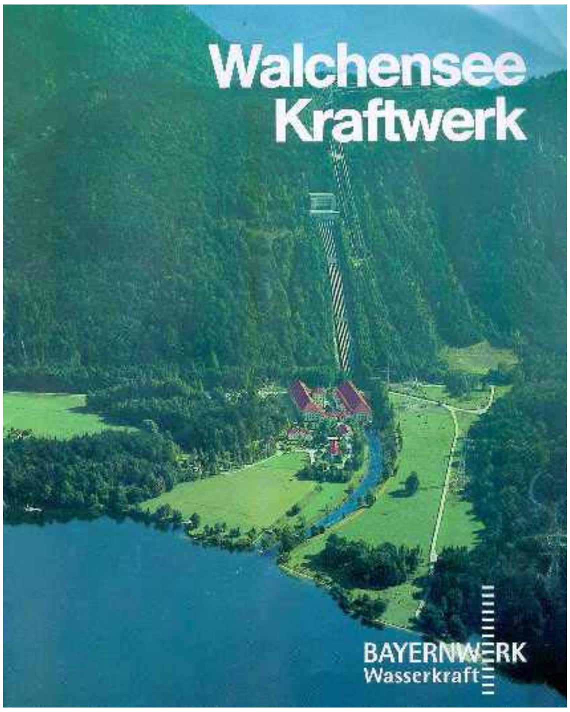
Für die Leistung gilt:

**Wirkleistung** $P_{wirk} = \langle P(t) \rangle = \langle U(t) \cdot I(t) \rangle = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

**Blindleistung** $P_{blind} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$

Im "Stromzähler" wird die Wirkleistung gemessen.

| | Drehstrom | Einphasenstrom |
|---|---|---|
| Installierte Leistung | 72.000 kW | 52.000 kW |
| Turbinenleistung | 4 x 18.000 kW | 4 x 13.000 kW |
| Drehzahl | 500 U/min | 250 U/min |
| Jahreserzeugung | rund 320 Mio. kWh | |




Walchensee rd. 800 m üNN : 16 km²

Kochelsee rd. 600 m üNN : 6 km²

tiefste Absenkug des Walchensees : 6,60 m

Speicherraum : 110 Mio. cbm

Rohrdurchmesser : oben 225 cm / unten 185 cm

Wandstärke : oben 10 mm / unten 27 mm

Turbinendurchfluß: insges. 84 m³/sec

"Erbauer": Oskar von Miller



## Zusammenfassung der Gleichungen für Statik

| | VAKUUM: INTEGRAL | VAKUUM: DIFFERENTIELL | MEDIUM: DIFFERENTIELL |
|---|---|---|---|
| GAUSS | $\oint \vec{E}\cdot d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ |
| FARADAY | $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ | $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ | $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ |
| KEINE MONOPOLE | $\oint \vec{B}\cdot d\vec{f} = 0$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ |
| AMPÈRE | $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{f}$ | $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ | $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}$ |

MATERIALBEZIEHUNGEN

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \Rightarrow \mu\mu_0 \vec{H}$$

STATIK

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

# ZEITABHÄNGIGKEIT [FARADAY-GESETZ]

$$\boxed{\text{ZEITLICH VERÄNDERLICHER MAGNETISCHER FLUSS ERZEUGT SPANNUNG}}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt}\int_F \vec{B}\cdot d\vec{F}$$

LENZSCHE REGEL

TOTALE ZEITABLEITUNG

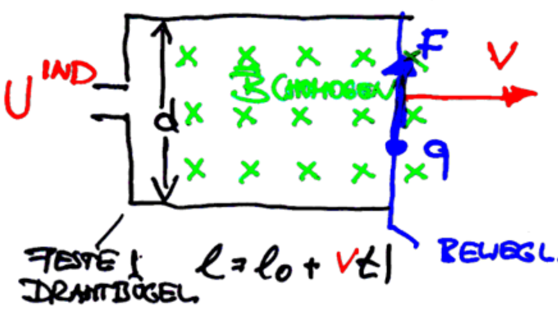
D.H. ÄNDERUNG DURCH $\vec{B}$ ODER $F$

$F$ ← (FLÄCHE VON $C$ BERANDET)



## a) ÄNDERUNG VON F ≙ LORENTZ-KRAFT

EINF. DEMONSTRATION




KRAFT AUF LADUNG

$$F = q\,v\,B$$

GLEICHGEWICHT ZW. LORENTZKRAFT UND AUFGEB. SPANNUNG

$$q\,E^{IND} = q\,v\,B \qquad U^{IND} = E^{IND}\cdot d = d\,v\,B$$

MAGN. FLUSS DURCH SCHLEIFE

$$\phi = A\,B = d\cdot \ell \cdot B$$

$$\frac{d\phi}{dt} = d\,B\cdot\frac{d\ell}{dt} = d\,v\,B = U^{IND}$$

FARADAY-GESETZ AUS LORENTZKRAFT HERGELEITET

b) ÄNDERUNG VON $\vec{B}$: NEUE PHYS. AUSSAGE

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{f} \underset{\text{Stokes}}{\Longrightarrow} \int_F \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

DIFFERENT. FORM DES FARADAY-GESETZ

→ MODIFIKATION DER MAXWELL-GLEICHUNGEN



## Notwendigkeit des Verschiebungsstroms

BISHERIGE MAXWELL-GLEICHUNGEN SIND NICHT KONSISTENT MIT KONTINUITÄTSGLEICHUNG

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{=0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$ (NUR GÜLTIG IN STATIK)

ALLG: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

# Formale Konstruktion eines Divergenz-freien Stroms

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)} = 0$$

$$\vec{j}^{\,eff} = \vec{j} + \vec{j}^{\,V}$$

$\vec{j}^{\,V} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ <u>VERSCHIEB. STROM</u>



<u>MAXW. HYPOTHESE</u> $\vec{j}^{\,eff}$ IN AMPÈRE-GESETZ

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \longrightarrow \vec{j}^{\,eff} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$ MODIFIZ. AMPÈRE-GESETZ

* NUR WESENTL. BEI ZEITABH. PHÄNOMENEN
* NEUE PHÄNOMENE (ELEKTROMAG. WELLEN) BESTÄTIGT DURCH EXPERIMENT (HERTZ)

# DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN (ENDLICH VOLLSTÄNDIG)

**MEDIEN**

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

**VAKUUM**

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

WAS BRAUCHT MAN ZUSÄTZLICH?

MEDIEN: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ $\quad(\vec{P}(\vec{E}))$

$\vec{H} = \mu_0\vec{B} + \vec{M} = \mu\mu_0\vec{B}$ $\quad(\vec{M}(\vec{H}))$

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (OHMSCHES GESETZ)

$\varepsilon$ (FREQ)

$\mu$ (FREQ)



+ BEWEGUNGSGLEICHUNGEN UND KRÄFTE:

$\vec{F}^{EM} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ LORENTZ-KRAFT

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{EM} + \vec{F}^{(ANDERE)}$

$W^{EM} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

ENERGIEDICHTE

DAMIT: VOLLSTÄNDIGER SATZ VON GLEICHUNGEN

KOPPELT $(\rho, \vec{j})$ (LADUNGEN, STRÖME) AN

$(\vec{E}, \vec{B})$ ELEKTROMAGN. FELDER

BEI GEGEB. $\rho, \vec{j}$: GEKOP. PART. DGL FÜR $\vec{E}, \vec{B}$

(2 HOMOGEN, 2 INHOMOGEN)

$\boxed{\text{ENTKOPPLUNG DURCH ELEKTROMAGN. POTENTIALE}}$