

Lichtausbreitung in optisch inhomogenen Medien

In der einfachsten Behandlung der geometrischen Optik geht man davon aus, dass die Lichtausbreitung über Strahlen beschrieben werden kann. Dies ist in homogenen Medien sinnvoll, lässt sich aber in optisch inhomogenen Medien, bei denen zum Beispiel der Brechungsindex ortsabhängig ist, nicht mehr einfach zur Problemlösung einsetzen. Damit auch dieser Fall ohne allzu großen Aufwand behandelt werden kann, benutzt man wieder die Maxwell-Gleichungen, verwendet jedoch die Bedingung der geometrischen Optik, nach der sich die optischen Eigenschaften nur langsam ändern. Die charakteristische Dimension ℓ des Problems sei dabei immer groß gegenüber der Wellenlänge λ des verwendeten Lichtes. Mit anderen Worten: die Längenskala ℓ auf der sich der Brechungsindex (Realteil oder Imaginärteil) ändert, ist viel größer als die Wellenlänge λ , $\ell \gg \lambda$. In diesem Fall kann man eine **nicht-ebene** Welle in einem kleinen Raumgebiet näherungsweise durch eine **ebene** Welle ersetzen. Amplitude $a(\vec{r}, t)$ und Ausbreitungsrichtung (die Normale auf die Phasenfront, d. h. die Richtung des Wellenvektors \vec{k}) der Welle werden sich bei der Ausbreitung über kleine Abstände $\Delta s \ll \ell$ nicht wesentlich ändern.

Wir haben früher gesehen, dass der Ansatz ebener Wellen für das elektrische oder magnetische Feld die Maxwell-Gleichungen bzw. die zugehörige Wellengleichung löst. Im betrachteten Fall kann man nun dies verallgemeinern und das Feld in der folgenden Form schreiben:

$$(1.1) \quad f(x, y, z, t) = a \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha))$$

Wir gehen jetzt ab von der Verwendung ebener Wellen, verwenden aber eine analoge Schreibweise in der wir ein langsame Veränderung von Amplitude und Richtung der Welle zulassen.

$$(1.2) \quad f(x, y, z, t) = a(\vec{r}, t) \cdot \exp(-i\psi(\vec{r}, t))$$

Die Amplitude $a(r, t)$ sei nun eine langsam veränderliche Funktion der Koordinaten und der Zeit. Im Gegensatz dazu ändert sich die Phasenfunktion ψ sehr schnell. Dies kann man einfach zeigen: Eine Änderung des Ortes um einen mikroskopisch kleinen optischen Weg $\Delta s = \lambda$ reicht aus, um die Phase um 2π zu verändern. Berücksichtigt man noch, dass in der geometrischen Optik alle Wegänderungen viel größer als λ sind folgt daraus direkt $|\psi| \gg 1$. Für die weitere Behandlung werden wir uns auf die Ausbreitung von Lichtstrahlen beschränken. Dabei können wir auf die explizite Behandlung der Amplitude $a(r, t)$ verzichten. In begrenzten Raumbereichen und Zeitintervallen (in denen die ebene Welle eine gute Näherung darstellt) hängt ψ fast linear von Ort und Zeit ab: In der Nähe des Ursprungs kann man z. B. schreiben:

$$(1.3) \quad \psi(\vec{r}, t) \approx \psi_0 + \vec{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0 + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Durch den Vergleich mit ebenen Wellen kann man lokale Größen, die momentane Frequenz ω und den lokalen Wellenvektor \vec{k} einführen:

$$(1.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega$$

$$(1.5) \quad \vec{\nabla} \psi = \vec{k}$$

Für ein stationäres monochromatisches Feld der Frequenz ω erhält man die Zeitabhängigkeit von ψ als $-\omega t$. Man kann dann die Zeitabhängigkeit eliminieren. Dazu führt man eine Funktion φ ein (Gl. (1.6)), die man als Eikonal bezeichnet.

$$\psi(x, y, z, t) = -\omega t + \frac{\omega}{c} \varphi(x, y, z) = -\omega t + k_0 \varphi(x, y, z); \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$(1.6) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{\psi(x, y, z, t) + \omega t}{k_0}$$

Nach dieser Definition ist die Änderung des Eikonals zwischen zwei Punkten gleich dem optischen Weg, der bei der Ausbreitung auf einen Pfad S durchlaufen wird. Dies kann man direkt am Beispiel ebener Wellen sehen. Die Änderung des Eikonal zwischen zwei Punkten hängt i. a. von dem benützten Weg ab. Die Beziehung für den lokalen Wellenvektor (Gl. (1.5)) lässt sich unter Verwendung des Eikonals wie folgt schreiben:

$$(1.7) \quad \vec{\nabla} \psi = \vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \frac{c \vec{k}}{\omega} = \frac{\vec{k}}{k_0} = \vec{n} \quad \text{oder} \quad n \cdot \vec{e}_k = \vec{\nabla} \varphi$$

mit $\vec{n} = \vec{e}_k \cdot n$; $|\vec{n}| = n$

Dabei ist \vec{n} ein Vektor in Richtung des Wellenvektors, dessen Betrag gleich dem lokalen Brechungsindex ist. Quadriert man Gl. (1.7) so erhält man eine skalare Gleichung, die ebenfalls die Ausbreitung von Lichtstrahlen in einem Medium mit dem Brechungsindex $n(x, y, z)$ beschreibt:

$$(1.8) \quad (\vec{\nabla} \varphi)^2 = n^2 \quad ; \quad (\vec{\nabla} \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = n^2$$

Die Gleichungen (1.7) und (1.8) nennt man Eikonalgleichungen.

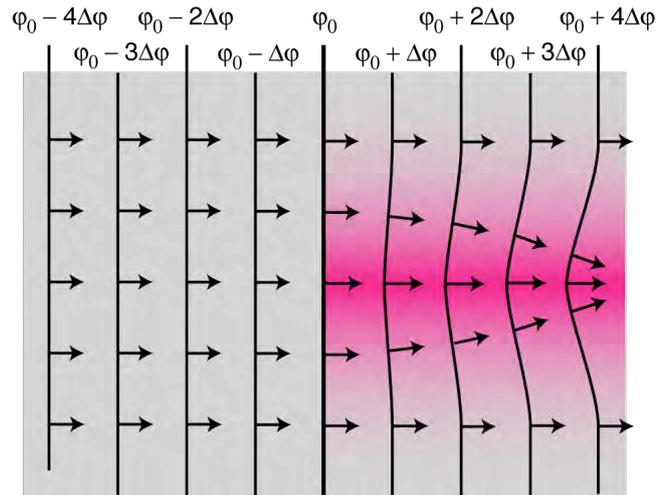


Abb. 1.1 Lichtausbreitung in einem Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex (rechte Seite)

Man kann die Lichtausbreitung unter Verwendung des Eikonalbegriffs folgendermaßen qualitativ vorstellen: Wir nehmen dazu zunächst an, dass eine ebene Welle aus einem Halbraum mit konstanter Brechzahl n_0 (links in Abb. 1.1) auf einen Bereich mit ortsabhängiger Brechzahl $n(x,y,z)$ (rechts in Abb. 1.1) fällt. Bei den ebenen Wellen wächst das Eikonale mit der Ausbreitung nach rechts linear an. Für einen festen Zeitpunkt t_0 erhalten wir im linken Halbraum Flächen konstanten Eikonals wie sie in Bild Abb. 1.1 als durchgezogene Linien angegeben sind. Der Gradient des Eikonals, der senkrecht auf diesen Flächen steht, gibt gerade die lokale Richtung des Wellenvektors \vec{e}_k an (siehe Gl. (1.7), Pfeile in Bild 1.1). Die Änderung des Eikonals im rechten Halbraum kann man nun folgendermaßen bestimmen: Die neue Fläche konstanten Eikonals $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ liegt in Richtung \vec{e}_k verschoben um Δs an dem Ort:

$$\vec{x}(\varphi) = \vec{x}(\varphi_0) + \Delta\vec{x} = \vec{x}(\varphi_0) + \vec{e}_k \Delta s,$$

Dabei lässt sich Δs aus der Eikonalgleichung berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{x} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{e}_k \Delta s = n\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k \Delta s = n\Delta s \\ (1.9) \quad \Delta s &= \frac{\Delta\varphi}{n} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden nun die neuen lokalen Wellenvektorrichtungen berechnet und anschließend die nächste Eikonalfäche bei $\varphi = \varphi_0 + 2\Delta\varphi$. Aus der Kenntnis des lokalen Brechungsindex und der Phasen/Eikonalfäche bestimmt man so den weiteren Verlauf des Eikonals. Beim obigen Beispiel (Abb. 1.1) sieht man sofort, dass in Bereichen mit erhöhter Brechzahl die Eikonalfächen weniger weit fortschreiten, als in Bereichen mit kleiner Brechzahl. Dies hat eine Krümmung der Eikonalfächen und damit eine Ablenkung der hier verlaufenden Lichtstrahlen zur Folge.

Den Verlauf eines Lichtstrahls über weitere Strecken in Medien mit ortsabhängigem Brechungsindex $n(x, y, z)$ kann man konstruieren, wenn man die Wellenvektoren als die lokalen Tangenten an den gekrümmten Strahl verwendet. So ist es im allgemeinen Fall möglich, den Lichtweg von einem leuchtenden Gegenstandspunkt Q zu dem Beobachtungsort P zu konstruieren. Die Helligkeit am Punkt P hängt davon ab, wieviel Licht von Q nach P gelangt. Damit eine hohe Helligkeit am Ort P aufgebaut wird, müssen möglichst "viele" Lichtstrahlen in Phase am Bildpunkt ankommen: Dies lässt sich nur dann erreichen, wenn benachbarte Strahlen zwischen Quelle und Bildpunkt

praktisch den gleichen (innerhalb von $\delta s \ll \lambda$) optischen Weg zurückgelegt haben. Wäre dies nicht der Fall, dann würden – aufgrund des großen optischen Weges zwischen Q und P und dem damit verbundenen großen Unterschied des Eikonals – die Beiträge von unterschiedlichen benachbarten Strahlen destruktiv interferieren. Dieser Zusammenhang führt uns direkt zum Fermatschen Prinzip, das besagt, dass der optische Weg auf dem tatsächlich durchlaufenen Pfad gegenüber benachbarten Pfaden ein Extremum aufweisen muss.

Für die Bestimmung der Lichtausbreitung in einem inhomogenen Medium kann man verschiedene Vorgehensweisen benutzen:

1. Direkte Lösung der Eikonalgleichung: Man startet mit dem vorgegebenen Brechungsindex $n(x, y, z)$ und den Randbedingung für die einfallende Lichtfront und versucht damit die Eikonalgleichung (1.7) zu lösen und so das Eikonol $\varphi(x, y, z)$ zu berechnen. Damit kann man dann den Strahlverlauf rekonstruieren. Dies ist jedoch i.a. nur für sehr einfache Geometrien möglich.
2. Berechnen des Verlaufs einzelner Strahlen: Die Eikonalgleichungen ((1.7) und (1.8)) lassen sich umformulieren, um eine differentielle Beziehung für den Strahlenverlauf zu erhalten (siehe nächster Abschnitt). Diese kann dann analytisch oder numerisch gelöst werden.

Berechnung des Strahlverlaufs in inhomogenen Medien

Für die Berechnung des Strahlverlaufs benötigen wir zunächst eine allgemeine Beziehung für die Ableitung längs eines Pfades (Lichtstrahls). Dazu betrachten wir zunächst in Abb. 1.2, einen typischen gekrümmten Lichtstrahl der die Punkte \vec{r} und \vec{r}' enthält. $d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ ist dabei das Wegelement der Länge ds . Den tangentialen Einheitsvektor des Pfades an dem betrachteten Punkt \vec{r} bezeichnen wir mit \vec{e}_k .

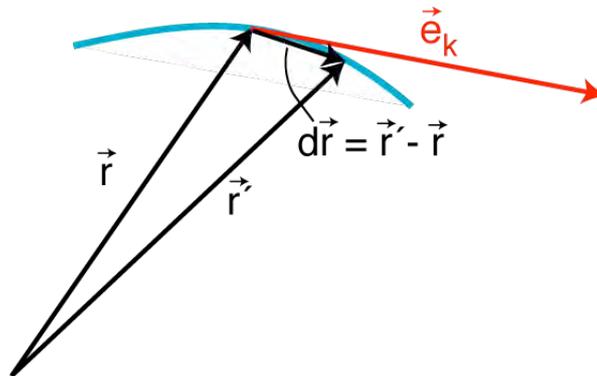


Abb. 1.2: Verlauf eines gekrümmten Strahls mit den beiden Punkten \vec{r} und \vec{r}' und dem tangentialen Einheitsvektor des Pfades \vec{e}_k .

Für die Ableitung d/ds irgendeiner Größe A längs eines Strahles finden wir:

$$(1.10) \quad \frac{d}{ds} = \vec{e}_k \cdot \vec{\nabla}; \quad \frac{dA(x, y, z)}{ds} = \vec{e}_k \cdot \vec{\nabla}A(x, y, z)$$

D. h. die Änderung einer Größe $A(x, y, z)$ auf der Wegstrecke ds ist gleich der Projektion des Gradienten von A auf den zum Wegelement $d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ gehörenden

Tangentialvektor \vec{e}_k . Aus dieser Beziehung sieht man sofort, dass \vec{e}_k selbst gleich der Ableitung des Ortes \vec{r} nach der Wegstrecke auf dem Pfad ist:

$$(1.11) \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_k$$

Wir kehren nun zur Behandlung der Strahlausbreitung zurück und berechnen dazu die Ableitung der Gl. (1.7) nach ds:

$$(1.12) \quad \frac{d}{ds}(n \cdot \vec{e}_k) = \frac{d}{ds}(\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{e}_k \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla}\varphi)$$

Ersetzt man auf der rechten Seite den Tangentialvektor \vec{e}_k gemäß Gl. (1.7)

durch $\frac{1}{n}(\vec{\nabla}\varphi)$, so ergibt sich :

$$(1.13) \quad (\vec{e}_k \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla}\varphi) = \frac{1}{n}(\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = \frac{1}{2n} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi)^2 = \frac{1}{2n} \cdot \vec{\nabla}(n^2) = \vec{\nabla}n$$

Dabei haben wir zweimal die Beziehung $\frac{d(f(x))^2}{dx} = 2f(x)\frac{df(x)}{dx}$ und die Eikonalgleichungen verwendet. Somit erhalten wir nun:

$$(1.14) \quad \frac{d}{ds}(n \cdot \vec{e}_k) = \vec{\nabla}n; \quad \text{oder} \quad \frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla}n$$

Mit dieser Gleichung lassen sich spezielle Probleme wie z. B. die Lichtausbreitung bei einer Luftspiegelung oder in einer Gradientenfaser berechnen.

Beispiel 1: Linsenwirkung eines Brechungsindexgradienten

Wir werden hier zunächst die Strahlausbreitung für eine dünne Scheibe behandeln, die ein radiales Brechungsindexprofil aufweist. Dabei werden wir zunächst nur den Grenzfall einer sehr kleinen Scheibendicke D behandeln. Im nächsten Kapitel wird dann die Lichtausbreitung für eine große Dicke berechnet.

Für die dünne Scheibe verwenden wir die obigen Beziehungen (z.B. Gl. (1.8)) und berechnen damit das Brechungsindex-Profil $n(r)$, das eine Gradientenindexlinse mit einer Brennweite f ergibt. Wir betrachten dazu ein achsenparallel einfallendes Lichtbündel und nehmen an, dass die Strahlablenkung innerhalb der Linse so schwach ist, dass eine lineare Näherung möglich wird. Wenn die Scheibe als Linse wirken soll, muss für die verschiedenen Abstände r von der Linsenachse die Ablenkung des Strahls in der Linse zusammen mit der Brechung beim Verlassen der Linse dazu führen, dass alle austretenden Strahlen die optische Achse gerade in der Brennebene schneiden.

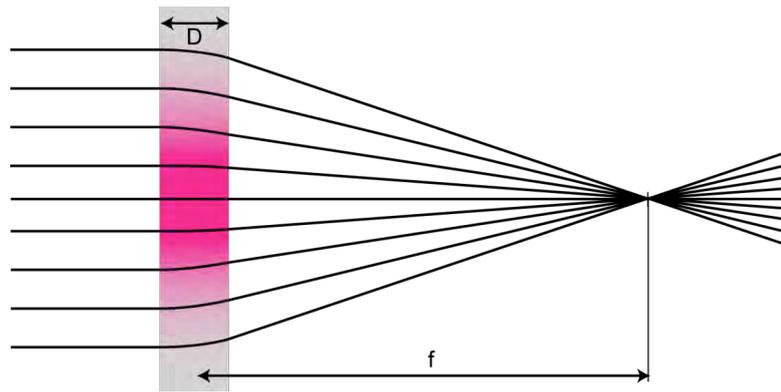


Abb. 1.3: Wenn der Verlauf des Brechungsindex in der Scheibe passend gewählt ist, treffen sich die verschiedenen parallel einfallenden Lichtstrahlen hinter der Scheibe in der Brennebene.

Dazu berechnen wir zuerst die Strahlablenkung in der Linse. Eine Anwendung der Gl. (1.20) auf unser Problem (anfängliche Strahlausbreitung in z -Richtung,

Brechungsindexgradient nur in radialer Richtung, $\vec{\nabla}n = \vec{e}_r \frac{dn}{dr}$) lässt direkt den

Ablenkwinkel β zur Achse berechnen:

$$(1.15) \quad \frac{d}{ds}(n \cdot \vec{e}_k) = \frac{dn}{ds} \vec{e}_k + n \cdot \frac{d\vec{e}_k}{ds} = \vec{\nabla}n = \vec{e}_r \frac{dn}{dr}$$

Berücksichtigt man dabei, dass der Strahl zunächst in z -Richtung zeigt, $\vec{e}_k = \vec{e}_z \perp \vec{e}_r$, so vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$(1.16) \quad \frac{d}{ds}(n \cdot \vec{e}_k) = n \cdot \frac{d\vec{e}_k}{dz} = \vec{e}_r \frac{dn}{dr}; \quad \text{oder} \quad \frac{d\vec{e}_k}{dz} = \vec{e}_r \frac{1}{n} \frac{dn}{dr}$$

Der Ablenkwinkel nach Durchlaufen der (kleinen) Dicke D wird nun (siehe Abb. 1.4):

$$(1.17) \quad \beta(r) \approx \tan(\beta(r)) = \frac{-1}{n(r)} \frac{dn}{dr} D$$

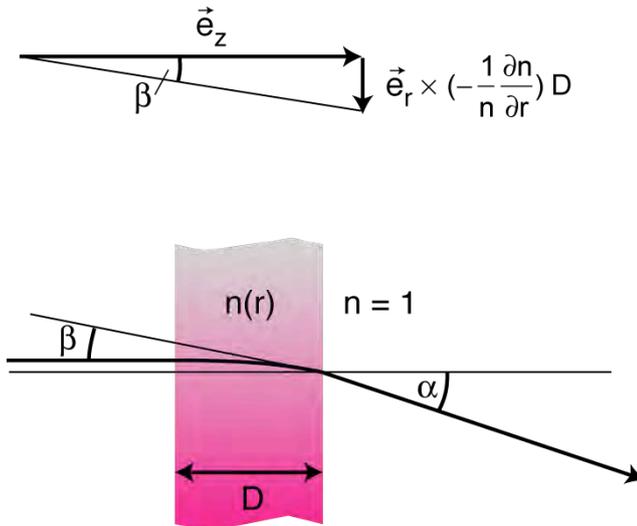


Abb. 1.4: Die Strahlablenkung kann mit Hilfe der Gl. (1.14) berechnet werden. An der Austrittsseite der Scheibe ist zusätzlich die Brechung zum äußeren Medium (Luft) zu berücksichtigen.

Die Brechung auf der Austrittsseite der Scheibe (äußeres Medium Luft, $n = 1$) führt zu einem Ablenkwinkel $\alpha(r)$ der mit Hilfe des Brechungsgesetzes berechnet werden kann:

$$n(r) \sin \beta(r) = \sin \alpha(r)$$

Im behandelten paraxialen Fall ergibt dies:

$$\alpha(r) \approx n(r) \cdot \beta(r) = -\frac{dn}{dr} D$$

Die Brennweite berechnet sich nun aus der Beziehung die für alle Abstände r von der optischen Achse gelten muss:

$$\alpha(r) \approx \tan \alpha(r) = r / f \quad \text{oder} \\ (1.18) \quad f = \frac{r}{\alpha(r)} = \frac{-r}{\frac{dn(r)}{dr} D}$$

Da die Brennweite nicht vom Abstand r von der Linsenachse abhängen darf, muss eine quadratische Abhängigkeit $n(r) = \gamma r^2 + \text{const.}$ des Brechungsindex vorliegen. Für einen

Verlauf gemäß $n(r) = n_0 \left(1 - \frac{g^2 r^2}{2} \right)$ ergibt dies:

$$(1.19) \quad f = \frac{1}{n_0 g^2 D}$$

Zahlenbeispiel:

Linsendicke $D = 1\text{cm}$, Brechungsindex im Zentrum $n_0 = 1.5$, Verlauf:

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{g^2 r^2}{2} \right); \quad \frac{dn(r)}{dr} = -n_0 g^2 r; \quad \text{gewünschte Brennweite } f = 1\text{m.}$$

Damit berechnet man: $g^2 = \frac{1}{n_o f D}$ oder $n(r) \approx 1.5 - \frac{-1}{2 \cdot 1 \cdot 0.01} r^2 = 1.5 - 50 \cdot r^2$

D. h. maximaler Brechungsindex liegt an der Linsenachse vor. Der Brechungsindex nimmt nach außen langsam ab. 1 cm vom Linsenzentrum entfernt, ist der Brechungsindex von 1,500 auf 1,495 gefallen. Wir sehen aus diesem Beispiel, dass geringfügige Änderungen des Brechungsindex im Promillebereich über Abstände von wenigen Zentimetern bereits zu Brennweiten im Bereich von Metern führen können. Dieser Fall kann im Experiment auftreten, wenn optische Gläser durch Dotierung gezielt verändert werden oder - ungewünscht - wenn bei der Herstellung Konzentrationsgradienten oder Schlieren nicht vermieden werden konnten. Häufig treten in Medien Temperaturunterschiede auf, die mit einer Änderung des Brechungsindex verknüpft sind. Diese „thermische Linsen“ findet man oft in Lasermedien, in denen hohe Anregungsleistungen benötigt werden, um die für die Lichtverstärkung nötige Besetzungsinversion herzustellen. Diese thermischen Effekte müssen bei Design und Betrieb von Lasern berücksichtigt werden.

Beispiel 2: Differenzialgleichung für den Strahlverlauf in einer einfachen zylindersymmetrischen Geometrie

Wir behandeln hier eine für Anwendungen oft wichtige zylindersymmetrische Geometrie. Ein ausgedehntes optisches Objekt (Stab) habe dabei einen rein radialen Brechungsindex Gradienten, $n = n(r)$. Die Lichtausbreitung erfolge dabei in einer Ebene, die die Zylinderachse enthält, unter kleinen Winkeln zur optischen Achse (paraxialer Fall). Der Strahlverlauf $r(z)$ kann nun wieder über Gl. (1.14) berechnet werden:

$$(1.20) \quad \frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n$$

Für den paraxialen, zylindersymmetrischen Fall lässt sich diese Gleichung umformen und so den Verlauf des Strahls im Stab berechnen:

$$(1.21) \quad ds \approx dz; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r(z) \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{\nabla} n = \begin{pmatrix} \partial n(r) / \partial r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1.22) \quad \frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \approx \frac{d}{dz} \left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{dz} \right) = n \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2}$$

Wir betrachten die r -Komponente des Strahlortes $r(z)$ während der Strahlausbreitung die durch die folgende Differenzialgleichung bestimmt wird:

$$(1.23) \quad n(r) \frac{d^2 r(z)}{dz^2} = \frac{\partial n(r)}{\partial r}; \quad \frac{d^2 r(z)}{dz^2} = \frac{1}{n(r)} \frac{\partial n(r)}{\partial r}$$

Beispiel 3: Stab mit Brechungsindex Gradient und GRIN-Linse

Für eine Reihe von Anwendungen z. B. bei der Abbildung der Emission aus Halbleiterlasern (die i.a. sehr kleine Bündeldurchmesser besitzen) oder zur Einkopplung von Licht in Glasfasern, haben in letzter Zeit Gradienten-Linsen (GRIN-Linsen, GRIN = GRadient INdex)) besondere Bedeutung erlangt. GRIN-Linsen sind kleine Glaszylinder (Stäbe) mit einem Brechungsindexprofil das (näherungsweise) quadratisch

von Radius abhängt. Für dieses Brechungsindexprofil werden paraxiale Strahlen längs der Achse geführt. Es ergibt sich dabei ein Cosinus-förmiger (Herleitung siehe unten) Strahlverlauf mit einer Periode L_0 die man als „pitch“ bezeichnet. Für große Längen wird diese Form der Strahlführung in Multimode Gradientenfasern eingesetzt. Bei kurzen Stablängen und relativ großen Durchmessern setzt man diese Stäbe als Linsen ein. Das Verhältnis der Länge dieser GRIN-Linse zur Periodenlänge bestimmt dabei deren optische Eigenschaften.

Zur Beschreibung des Strahlverlaufs in einem Gradienten-Stab gehen wir von Gl. (1.23) aus. Wir betrachten einen quadratischen Verlauf des Brechungsindex:

$$(1.24) \quad n(r) = n_o \left(1 - \frac{g^2 r^2}{2} \right)$$

mit $\frac{g^2 r^2}{2} \ll 1$. Eingesetzt in Gl. (1.23) ergibt sich für den Strahlverlauf $r(z)$ die folgende Differentialgleichung:

$$(1.25) \quad \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = \frac{1}{n_o \left(1 - \frac{g^2 r^2}{2} \right)} (-n_o g^2 r)$$

Für kleine Abstände von der Achse ($\frac{g^2 r^2}{2} \ll 1$) ergibt sich durch Entwicklung des Nenners und Beschränkung auf Terme linear in r :

$$(1.26) \quad \frac{d^2 r}{dz^2} + g^2 r = 0$$

Diese Differenzialgleichung (es ist die bekannte Gleichung eines harmonischen Oszillators) besitzt für $g > 0$ als Lösung harmonische Funktionen (Cosinus und Sinus) mit der Periode L_0 , z. B.

$$r(z) = A \cdot \cos(g z) + B \cdot \sin(g z) \text{ mit } g \cdot z = 2\pi \frac{z}{L_0} .$$

Dabei nennt man L_0 den Pitch einer Gradientenlinse:

$$(1.27) \quad L_0 = \frac{2\pi}{g}$$

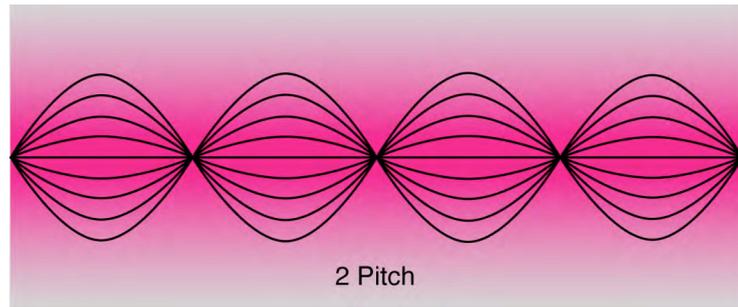


Abb. 1. 5: Cosinus-förmige Strahlenausbreitung in einem Medium mit quadratischem Brechungsindex-Verlauf.

Betrachtet man einen Strahl der unter einem Winkel β_1 zu z -Achse im Abstand r_1 von Zentrum in einem Gradienten-Stab (beginnend am Ort $z = 0$) startet, so berechnet sich der weitere Verlauf aus den Randbedingungen r_1 und β_1 wie folgt:

$$(1.28) \quad \begin{aligned} r(z) &= r_1 \cos(g z) + \frac{\beta_1}{g} \sin(g z) \\ \beta(z) &= \beta_1 \cos(g z) - r_1 g \sin(g z) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man direkt die Strahlmatrix des Gradienten-Stabs berechnen. Dabei muss wenn man noch zusätzlich die Brechung an Ein- und Austrittsflächen berücksichtigen. Für einen Gradienten-Stab der Länge L mit Brechungsindex n_0 auf der Achse erhält man:

$$(1.29) \quad \vec{M}_{GRIN} = \begin{pmatrix} \cos(g L) & -n_0 g \sin(g L) \\ \frac{1}{n_0 g} \sin(g L) & \cos(g L) \end{pmatrix}$$

GRIN-Linse: Aus dieser Beziehung Gl. (1.29) kann man durch Vergleich mit der Strahlmatrix eines abbildenden Systems (siehe Kapitel 3.3.6) die Brennweite f und die Lage der Hauptebenen der GRIN-Linse berechnen. Man berechnet, z. B. wenn sich die GRIN-Linse in einem Medium mit $n = 1$ befindet, die Brennweite gemäß den Beziehungen aus Kapitel 3.3.6 zu:

$$(1.30) \quad f = \frac{1}{n_0 g \sin(gL)}$$

Für kleine Längen L gibt dies: $f = 1/(n_0 g^2 L)$ wie wir es schon oben für die dünne Scheibe erhalten hatten. Wir sehen aus Gl. (1.30), dass die Brennweite einer GRIN-Linse von ihrer Länge abhängt. Für $L < 0.5 L_0$ verhält sich die GRIN-Linse wie eine Sammellinse für $0.5 < L_0 < 1$ wie eine Zerstreuungslinse. Einige Anwendungsbeispiele für GRIN-Linsen sind in Abb. 1.6 gezeigt.

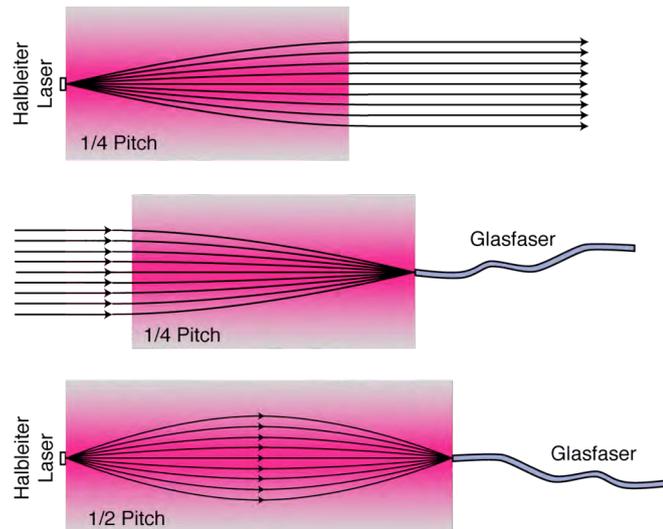


Abb. 1.6: Anwendungsbeispiele für GRIN-Linsen

Gradientenfaser: Beim Einsatz von Multimode-Fasern mit einem rechteckförmigen Brechungsindexprofil (siehe Kap. 2.4.1) für die Datenübertragung wird die mögliche Übertragungsbandbreite dadurch begrenzt, dass die Signal-Laufzeiten vom Winkel des Lichtstrahls bezüglich der Faserachse abhängen. In einer Gradientenfaser mit quadratischem Brechungsindexprofil und dem Cosinus-förmigen Strahlverlauf ist die Laufzeit nun nicht mehr vom Winkel bezüglich der Faserachse abhängig. Somit können in einer solchen Faser die Übertragungsbandbreiten ganz wesentlich (um mehr als einen Faktor 100) gegenüber einer Stufenindexfaser erhöht werden.

Herstellung des Brechungsindexprofils: Bei GRIN-Linsen werden die Brechungsindex-Gradienten durch den gezielte Austausch (Diffusion) von Ionen in den Glasstäben erreicht. Hierzu werden oft z. B. Silberionen oder Lithiumionen eingesetzt. Bei Gradientenfasern werden auch die schon in Kap. 2.4.6. erwähnten Verfahren eingesetzt, bei denen der gezielte Aufbau eines Brechungsindexprofils aus unterschiedlich dotierten Gläsern eingesetzt wird.

Links zum Thema GRIN-Linse:

[http://www.linos.com/pages/mediabase/original/gradientenindex_\(grin\)_linsen_2183.pdf](http://www.linos.com/pages/mediabase/original/gradientenindex_(grin)_linsen_2183.pdf)

http://www.grintech.de/d_main_grin.htm

Beispiel 4: Fata Morgana

Zum Abschluss der Behandlung der Lichtausbreitung in inhomogenen Medien soll noch der Fall einer Luftspiegelung behandelt werden, wie sie über sehr heißen ebenen Oberflächen zu finden ist. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass durch die heiße Oberfläche ein Dichtegradient in der unmittelbar darüber liegenden Luftschicht erzeugt wird, der dort zu einem Brechungsindexgradienten führt. Unmittelbar an der Oberfläche wird die höchste Temperatur und damit der niedrigste Brechungsindexwert zu finden sein. Oberhalb der dünnen Grenzschicht wird dann der Brechungsindex den normalen Wert für Luft erreichen und darüber konstant bleiben. Der positive Gradient wird dazu führen, dass die Lichtstrahlen nach oben gebogen werden, und sich so der im Buch (Kap.

3) angegebene Strahlenverlauf ergibt. (Bitte beachten Sie, dass z. B. über einer kalten Wasser(- oder Schnee)oberfläche eine umgekehrter Gradient auftreten kann, und so z. B. Boote am Himmel gesehen werden können.) Wir nehmen nun vereinfachend an, dass der Raum oberhalb der heißen Fläche in zwei Bereiche unterteilt werden kann: Im Bereich I ($y > 0$) habe der Brechungsindex konstant den Wert $n_0 \approx 1,0003$. Im Bereich II ($y < 0$) nehme der Brechungsindex quadratisch mit der Tiefe y ab:

$$(1.31) \quad n(y) = n_0 - \frac{n_0 g^2}{2} y^2; \quad \text{für } y > 0 \quad \text{mit } n_0 \gg \frac{n_0 g^2}{2} y^2$$

Dabei ist die Grenzschicht als dünn angenommen, so dass das Licht nicht in Tiefen y gerät, in denen die Bedingung von Gl. (1.31) nicht gewährleistet wäre. Wir wählen diese quadratische Abhängigkeit, damit wir im Bereich II die bereits bekannten Lösungen der Gleichung für die Strahlablenkung (Gl. (1.23)) verwenden können. Diese Annahme führt nicht zu wesentlichen Verfälschungen der Strahlenverläufe, wenn die Ablenkung in einer dünnen Schicht erfolgt. Wir wählen nun den Nullpunkt der z -Achse so, dass hier die aus dem Bereich I einfallenden Lichtstrahlen gerade die Grenzschicht erreichen.

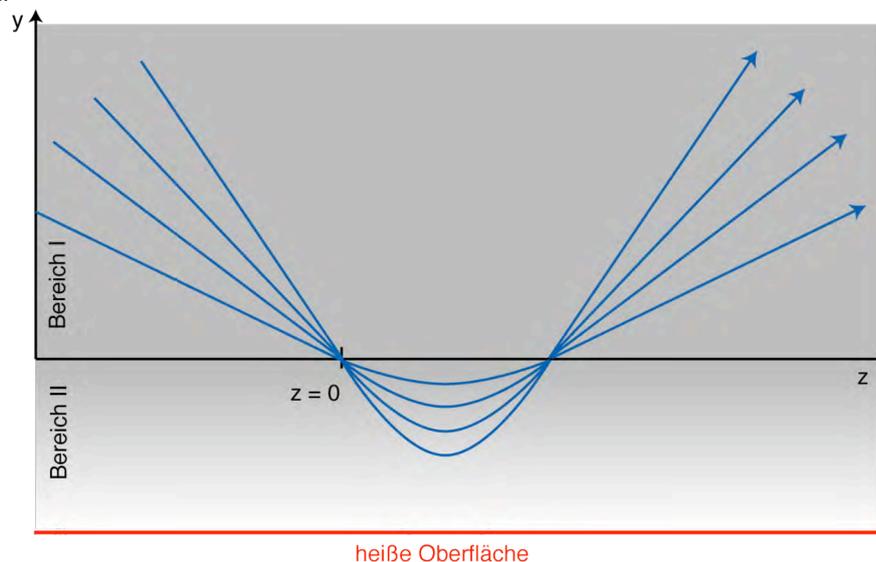


Abb. 1.7: Strahlverlauf bei einer Luftspiegelung. Im Bereich II ist hier ein quadratischer Verlauf des Brechungsindex angenommen. Unter dieser Annahme erhalten wir in diesem Bereich dieselben Strahlverläufe wie in einer Gradientenfaser.

Im Bereich I laufen die Lichtstrahlen vor der Ablenkung geradlinig mit den Bahnen:

$$y(z) = -\alpha \cdot z; \quad y'(z) = -\alpha$$

Im Bereich II können wir Gl. (1.23) wie folgt schreiben:

$$(1.32) \quad \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} = \frac{1}{n_0 \left(1 - \frac{g^2 y^2}{2}\right)} (-n_0 g^2 y) \approx -g^2 y$$

Diese Gleichung wird gelöst durch den folgenden Ansatz:

$$y(z) = A \cos(g \cdot z) + B \sin(g \cdot z)$$

Aus den Randbedingungen für $y(0)$ und $y'(0)$ ergeben sich Bedingungen für die Konstanten A und B:

$$A = 0; \quad B = \frac{-\alpha}{g}$$

Für die Lösung im Bereich II ergibt sich damit:

$$(1.33) \quad y(z) = \frac{-\alpha}{g} \sin(g \cdot z); \quad \text{für } 0 < z < \pi/g$$

Wir sehen daraus, dass sich die Lichtstrahlen, unabhängig davon unter welchem Winkel α sie auf die Grenzschicht auftreffen, für die Strecke von $\frac{1}{2}$ Pitch im Bereich II aufhalten und dabei abgelenkt werden, bevor sie bei $z = \pi/g$ wieder den Bereich I erreichen und sich dort mit der gleichen Neigung zur Oberfläche wie beim Einfall ausbreiten. Aus der hier vorgestellten Behandlung wird aber auch ersichtlich, dass nur Lichtstrahlen reflektiert werden, die so flach auftreffen, dass sie die dünne Grenzschicht nicht vollständig durchqueren. Unter dieser Bedingung kann man den maximalen Winkel α_{\max} des einfallenden Strahls abschätzen. Dazu berechnen wir die Dicke Δy der Grenzschicht aus der Bedingung:

$$(1.34) \quad n(-\Delta y) = 1 = n_0 - \frac{n_0 g^2}{2} \Delta y^2; \quad \Delta y^2 \approx \frac{2(n_0 - 1)}{g^2} = \frac{0,0006}{g^2}$$

Die maximale Eindringtiefe $|y_{\max}|$ bestimmt man aus dem Verlauf $y(z)$. An der Stelle $z = \pi/(2g)$ wird die maximale Tiefe $|y_{\max}| = \alpha/g$ erreicht. Die Bedingung $|y_{\max}| < \Delta y$ führt zu:

$$(1.35) \quad |y_{\max}| = \frac{\alpha}{g} < \Delta y = \sqrt{\frac{0,0006}{g^2}} \approx \frac{0,024}{g}$$

Nur für kleine Auftreffwinkel von $\alpha < 0,024 \approx 1,4^\circ$ tritt die Reflexion auf. Dies zeigt uns, dass eine Fata Morgana nur in der Nähe des Horizonts zu sehen ist (siehe Abb. 1.8).



Abb. 1.8: Luftspiegelung auf einer trockenen Strasse. Die Spiegelung ist nur für sehr kleine Auftreffwinkel, d. h. für die Scheinwerfer der weit entfernten Fahrzeuge zu sehen.