Behandlung der komplexen Darstellung von Wellen: Negative Frequenzen und komplexe Felder

Bei der Behandlung reeller elektromagnetischer Felder im Fourierraum ist man mit der Tatsache konfrontiert, dass die Fouriertransformierte eines reellen Feldes $E(t)$ im Frequenzraum eine komplexe Funktion $E_0(\omega)$ ergibt, die für Frequenzen $-\infty < \omega < +\infty$ definiert ist. Dabei macht es erhebliche konzeptionelle Schwierigkeiten, sich negative Frequenzen vorzustellen, wenn man die physikalische Definition einer Frequenz zugrunde legt, nach der eine Frequenz als die Zahl der Schwingungen pro Sekunde zu verstehen ist. In diesem Zusammenhang soll in den folgenden Abschnitten gezeigt werden, was negative Frequenzen bedeuten und wie der Imaginärteil von $E_0(\omega)$ zu verstehen ist.

Wir betrachten ein reelles (physikalisch messbares) elektrisches Feld am Ursprung (x = 0) $E(t)$, das nach Fouriertransformation im Frequenzraum die folgende Form aufweist.

(1.1) $$E_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\exp(-i\omega t)dt$$

Zur Vereinfachung betrachten wir statt des Feldvektors nur eine einzelne Komponente. Da $E(t)$ eine reelle Größe ist, besteht eine Beziehung, die Feldstärken, d. h. die spektralen Amplituden $E_0(\omega)$ bei positiven und negativen Frequenzen miteinander in Beziehung setzt:

(1.2) $$E_0(\omega) = E_0^*(-\omega)$$

Durch Rücktransformation lässt sich wieder des Feld im Zeitraum rekonstruieren.

(1.3) $$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Dabei sind aufgrund der Beziehung (1.2) Realteil ($E_0^R(\omega)$) und Imaginärteil ($E_0^I(\omega)$) von $E_0(\omega)$ in der Frequenz symmetrisch bzw. antisymmetrisch bezüglich der Frequenz $\omega = 0$. Die Verläufe bei negativen Werten von ω lassen sich aus denen bei positiven berechnen. Es ist dabei nicht verwunderlich, dass die Information aus dem Bereich $-\infty$ bis $+\infty$ für die reelle Größe $E(t)$ durch die beiden Funktionsverläufe $E_0^R(\omega)$ und $E_0^I(\omega)$ für positive Frequenzen $0 < \omega < +\infty$ beschrieben werden kann.

Die Bedeutung von Feldern mit negativen Frequenzen ist zunächst nicht verständlich. Eine negative Frequenz hat hier als physikalische Größe gemäß der Definition der Frequenz (Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit) keine Bedeutung. Sie tritt in den obigen Gleichungen nur auf, damit das elektrische Feld im Zeitraum reell wird.

Für ein besseres Verständnis kann man die folgenden Überlegungen heranziehen: Die Transformation des reellen Zeitverlaufs des Feldes in den Frequenzraum kann durch eine Kombination von cos- und sin-Fouriertransformation erreicht werden.

Bei diskreter FT (periodischer Zeitverlauf) als Beispiel ergibt dies:

(1.4) $$E(t)=\sum_{j=0}^{\infty} E_{0j}^{\cos}\cos(\omega jt)+E_{0j}^{\sin}\sin(\omega jt)$$

Es werden bei dieser diskreten FT zwei Typen von Funktionen eingesetzt, sin und cos, die die unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften der Funktion *E(t)* bezüglich $t = 0$ berücksichtigen. Bisher sind die Frequenzkomponenten nur bei positiven Frequenzen $\omega_j = j\ \omega$ definiert. Ersetzt man nun gemäß der Euler-Beziehung die trigonometrischen Funktionen cos und sin durch die komplexe Exponentialfunktion, so kann man die neue Beziehung vereinfachen (siehe unten Gl. (1.7), in dem man den Index j von -∞ bis +∞ laufen lässt, dabei nun „negative“ Frequenzen $\omega_j = j\ \omega$ (für $j < 0$) akzeptiert:

(1.5) $$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}(\exp(i\alpha)+\exp(-i\alpha));\qquad \sin(\alpha)=\frac{1}{2i}(\exp(i\alpha)-\exp(-i\alpha))$$

(1.6) $$E(t)=\sum_{j=0}^{\infty} E_{0j}^{\cos}\cos(\omega jt)+E_{0j}^{\sin}\sin(\omega jt)=\sum_{j=0}^{\infty} E_{0j}^{\cos}\frac{1}{2}(e^{i\omega jt}+e^{-i\omega jt})+E_{0j}^{\sin}\frac{1}{2i}(e^{i\omega jt}-e^{-i\omega jt})$$

Dieser Ausdruck lässt sich umschreiben, wenn man negative Indizes zulässt:

(1.7) $$\begin{aligned}E(t)&=\sum_{j=0}^{\infty} E_{0j}^{\cos}\frac{1}{2}(e^{i\omega jt}+e^{-i\omega jt})+E_{0j}^{\sin}\frac{1}{2i}(e^{i\omega jt}-e^{-i\omega jt})=\\&=\frac{1}{2}\left(E_{00}^{\cos}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}(E_{0j}^{\cos}-iE_{0j}^{\sin})\exp^{i\omega jt}\right)=\frac{1}{2}\left(E_{00}^{\cos}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}(E_{0j}^{\cos}-iE_{0j}^{\sin})\exp^{i\omega_j t}\right)\end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten zum sin-Anteil mit dem Imaginärteil, die des cos-Anteils mit dem Realteil der spektralen Amplitude verknüpft. Es gilt für k > 0:

$$E_{0-k}^{\cos}=E_{0k}^{\cos}\ \text{und}\ E_{0-k}^{\sin}=-E_{0k}^{\sin}.$$

D. h. der Realteil der spektralen Amplitude ist symmetrisch in ω bezüglich $\omega = 0$, der Imaginärteil antisymmetrisch. Dies ergibt dann im Zeitraum das reale Feld *E(t)*.

Behandelt man nun nicht-periodische Zeitverläufe *E(t)*, so ist das Fourierintegral zu verwenden.

(1.8) $$E_0(\omega)=E_0^R(\omega)+iE_0^I(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)\exp(-i\omega t)dt$$

mit den bekannten Symmetrieeigenschaften von Realteil ($E_0^R(\omega)$) und Imaginärteil ($E_0^I(\omega)$) von $E_0(\omega)$.

Wie lassen sich negative Frequenzen vermeiden?

Mit einer kurzen Behandlung soll nun eine komplexe Schreibweise des Feldverlaufs im Zeitraum eingeführt werden, bei der negative Frequenzkomponenten vermieden werden, das physikalisch messbare Feld im Zeitraum durch Realteilbildung gewonnen wird und eine einfache Handhabung der Wellen durch komplexe Exponentialfunktionen (anstelle der trigonometrischen Funktionen) möglich wird.

Dazu setzen wir die spektralen Amplituden bei negativen Frequenzen auf Null und definieren so unsere neue Funktion $E_0^+(\omega)$, die bei negativen Frequenzen verschwindet:

(1.9) $$E_0^+(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ für } \omega < 0 \\ E_0(\omega) \text{ für } \omega > 0 \end{cases}$$

Durch Fouriertransformation von $E_0^+(\omega)$ erhalten wir eine neue, jetzt komplexwertige Funktion in Zeitraum: $E^+(t)$:

(1.10) $$E^+(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0^+(\omega)\exp(i\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Durch eine Betrachtung der Rücktransformation von $E_0(\omega)$ und $E_0^+(\omega)$ kann man im Zeitraum das reelle Feld *E(t)* mit dem komplexen Feld $E^+(t)$ vergleichen. Dabei verwenden wir erneut die Euler Beziehung $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Für das Ausgangsfeld *E(t)* gilt:
(1.11)

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\omega t)d\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(E_0^R(\omega)\cos(\omega t) - E_0^I(\omega)\sin(\omega t) + iE_0^I(\omega)\cos(\omega t) + iE_0^R(\omega)\sin(\omega t))d\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(E_0^R(\omega)\cos(\omega t) - E_0^I(\omega)\sin(\omega t))d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(E_0^R(\omega)\cos(\omega t) - E_0^I(\omega)\sin(\omega t))d\omega \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichheitszeichen sind erfüllt, da *E(t)* reell ist und somit für die spektale Amplitude gilt: $E_0(\omega) = E_0^*(-\omega)$. Für das komplexe Feld $E^+(t)$ finden wir:

(1.12)

$$\begin{aligned} E^+(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0^+(\omega)\exp(i\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\omega t)d\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(E_0^R(\omega)\cos(\omega t) - E_0^I(\omega)\sin(\omega t) + iE_0^I(\omega)\cos(\omega t) + iE_0^R(\omega)\sin(\omega t))d\omega = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(E_0^R(\omega)\cos(\omega t) - E_0^I(\omega)\sin(\omega t))d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(E_0^I(\omega)\cos(\omega t) + E_0^R(\omega)\sin(\omega t))d\omega = \\ &\frac{1}{2}E(t) + \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(E_0^I(\omega)\cos(\omega t) + E_0^R(\omega)\sin(\omega t))d\omega \end{aligned}$$

(1.13) $$E(t) = 2(\mathrm{Re}(E^+(t)) = 2\mathrm{Re}(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\omega t)d\omega)$$

Der Realteil von E^+*(t)* stimmt bis auf einen Faktor ½ mit *E(t)* überein. Der Imaginärteil entspricht einer Funktion, bei der cos- und sin-Komponenten gerade um π/2 in der Phase gegenüber den Komponenten im Realteil verschoben sind.

Das komplexe Feld $E^{+}(t)$ kann nun als Produkt von Amplitudenfunktion $\mathcal{E}(t)$ und Phasenterm $\exp(i\Phi(t)$ geschrieben werden:

$$E^{+}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\exp(i\Phi(t)) \tag{1.14}$$

Die Ableitung der Phasenfunktion nach der Zeit definiert die instantane Frequenz (Momentanfrequenz) des Feldes.

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{1.15}$$

Aus (1.13) und (1.14) und ergibt sich für das reelle Feld $E(t)$ aus $E(t) = 2\,\mathrm{RE}(E^{+}(t))$:

$$E(t) = \mathcal{E}(t)\cos(\Phi(t)) \tag{1.16}$$

Wellenpakete

Wenn sich die spektrale Amplitude nur in der Nähe einer Frequenz ω_0 von Null unterscheidet, erhält man für $E^{+}(t)$:

$$E^{+}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\exp(i\Phi(t)) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\exp(i\varphi(t))\exp(i\omega_0 t)) = \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{E}}(t)\exp(i\omega_0 t)) \tag{1.17}$$

Hier haben wir den typischen Ausdruck für ein (komplexes) Wellenpaket, wie er in der Optik immer wieder verwendet wird. Die im allgemeinen Fall komplexe Einhüllende $\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}(t)\exp(i\varphi(t))$ wird reell, wenn der Lichtimpuls nicht phasenmoduliert ist, ($\varphi(t) = 0$), d. h. wenn es eine einzige, feste Trägerfrequenz ω_0 gibt. Die Festlegung der Trägerfrequenz bei einem speziellen Phasenverlauf $\Phi(t)$ sollte so erfolgen, dass die nach Abtrennung der Trägerfrequenz verbleibende Modulation (mit φ(t)) im Bereich der intensiven Anteile des Lichtimpulses so klein wie möglich ist. Man kann dies zum Beispiel so durchführen, dass die Abweichung der instantanen Frequenz von der Trägerfrequenz ω_0 im Bereich maximaler Intensität verschwindet ($d\varphi(t)/dt = 0$), oder dass die über die Intensität gewichtete Momentanfrequenz gerade den Wert ω_0 bestimmt:

$$<\omega> \; = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E_0^{+}(\omega)|^2 \;\omega\; d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_0^{+}(\omega)|^2 \; d\omega} = \omega_0 \tag{1.18}$$

Zusammenfassend:

- Die Fouriertransformation eines reellen Verlauf eines elektrischen Feldes ergibt komplexe spektrale Amplituden, bei denen die Werte bei positiven Frequenzen ausreichen, den Feldverlauf zu beschreiben.
- Für die in der Physik vorkommenden reellen elektromagnetischen Felder, ist eine physikalische Interpretation der negativen Frequenzen nicht sinnvoll und nicht notwendig.
- Die Rücktransformation der spektralen Amplituden (bei positiven Frequenzen) in den Zeitraum, ergibt einen komplexen Zeitverlauf, dessen Realteil bis auf einen Faktor ½ mit *E(t)* übereinstimmt.